JOURNAL OF NUMBER THEORY **67**, 85–114 (1997)
ARTICLE NO. NT972146

Points rationnels sur les familles de courbes de genre au moins 2

Teresa de Diego*

Université Paris 7, U.F.R. de maths, T45–55, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 5, France

Communicated by M. Waldschmidt

Received January 9, 1997

On donne, pour les familles algébriques de courbes de genre au moins 2, une version uniforme de la démonstration de Vojta–Bombieri du théorème de Faltings. On en déduit une borne uniforme du nombre de points rationnels sur certaines familles. © 1997 Academic Press

of the number of rational points on some families. © 1997 Academic Press

1. INTRODUCTION

Soit k un corps de nombres, et soit $\bar{k}$ une clôture algébrique de k. Soit C une courbe projective sur k, lisse et de genre $g \geqslant 2$. Faltings a démontré en 1983 (voir [5]) la conjecture de Mordell qui dit qu'alors l'ensemble $C(k)$ des points rationnels de C est fini.

Vojta a donné une nouvelle démonstration en utilisant la théorie de l'intersection et des approximations diophantiennes (voir [21]). Cette démonstration a été simplifiée par Faltings (1991, voir [6]) et Bombieri l'a réécrite dans le langage de la théorie élémentaire des hauteurs (cf. [1]). Elle donne le théorème suivant.

THÉORÈME 1 (Vojta, voir [1]). *Soit C une courbe définie sur un corps de nombres k, de genre $g \geqslant 2$. On considère C comme plongée dans sa jacobienne J et l'on note $|\ |$ la norme euclidienne sur $J(\bar{k}) \otimes \mathbf{R}$ associée au diviseur thêta. Il existe une constante $\gamma_1(C)$, ne dépendant que de C, et il existe une constante $\gamma_2(g)$, ne dépendant que de g, telles que si k' est une extension finie de k, on ait* $\operatorname{Card}\{x \in C(k') \mid |x| \geqslant \gamma_1(C)\} \leqslant \gamma_2(g)\, 7^{\operatorname{rang}(J(k'))}$.

Le résultat principal de ce texte (Théorème 2, voir Chap. 2) est une version uniforme de ce théorème lorsque la courbe varie dans une famille

* E-mail:dediego@math.jussieu.fr.

0022-314X/97 $25.00

algébrique $\mathscr{C}$ paramétrée par une variété T. On montre que pour toute fibre lisse $\mathscr{C}_t$ de la famille, on peut prendre $\gamma_1(\mathscr{C}_t) = (\sqrt{h(t)} + 1)\,\gamma_1(\mathscr{C})$, où h désigne une fonction hauteur sur $T(\bar{k})$. On remarque également (voir Section 5.e) qu'on peut prendre $\gamma_2(g)$ constante absolue égale à $\frac{55}{2}$.

En utilisant la démonstration de Bombieri–Faltings–Vojta de la conjecture de Mordell, Silverman a montré que le nombre de points rationnels sur k de toute "tordue" C_ξ de C est majoré par une expression exponentielle en le rang de jacobienne de C_ξ (voir [20]) et en a déduit une majoration uniforme du même type pour les courbes de Catalan.

Dans le même esprit et comme application du Théorème 2, on donne en admettant une conjecture de Szpiro, une majoration du même type pour toute famille à un paramètre de courbes de genre au moins 2 telle que la famille des jacobiennes soit isogène à un produit de familles non isotriviales de courbes elliptiques (Chap. 6, Proposition 6) et on exhibe des exemples de telles familles, (voir Chap. 6 ci-dessous).

2. NOTATIONS, SITUATION ET RÉSULTAT PRINCIPAL

2.a. *Hauteurs*

Un des principaux outils est la notion de hauteur. On en utilisera la version la plus élémentaire: celle de Weil (pour les points) (voir [11]) et sa généralisation aux cycles de variétés projectives donnée (via les formes de Chow) par Nesterenko [14, 15] et Philippon [16, 17]. Précisons les normalisations qu'on utilisera.

Rappelons la définition de la hauteur (logarithmique) de Weil sur $\mathbb{P}^n(\bar{\mathbb{Q}})$. Soit $P = (x_0 : \cdots : x_n) \in (\mathbb{P}^n(\bar{\mathbb{Q}})$. Soit k un corps de nombres tel que $P \in \mathbb{P}^n(k)$. Soit M_k l'ensemble des places de k sur $\mathbb{Q}$, où une place complexe correspond à un couple de plongements complexes conjugués. Soit v une place finie, on note $|\;|_v$ la valeur absolue v-adique normalisée par: si $p \mid v$, $|p|_v = p^{-1}$. Pour v une place infinie et $x \in k$, on désignera par $|x|_v$ le réel $|\sigma_v(x)|$, où σ_v est un plongement de k dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ associé à v. Soit $P = (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k)$, on définit

$$h(P) = \frac{1}{[k : \mathbb{Q}]} \sum_{v \in M_k} \delta_v \ln \max_i |x_i|_v, \qquad \text{où} \quad \delta_v = [k_v : \mathbb{Q}_v].$$

Soit V une variété projective sur un corps de nombres k. Pour tout diviseur D, on définit sur $V(\bar{k})$, aux fonctions bornées près, une fonction hauteur h_D associée à D comme suit.

Si D est un diviseur très ample, on considère un plongement φ_D associé. On définit $h_D = h \circ \varphi_D$.

Si D est un diviseur quelconque, on écrit $D = A - B$ avec A et B très amples et on définit $h_D = h_A - h_B$.

Pour la démonstration que ceci est bien défini et pour les propriétés; voir [11].

Si F est un polynôme à plusieurs variables à coefficients dans un corps de nombres, $h(F)$ désignera la hauteur du point dont les coordonnées sont les coefficients de F.

On utilisera le résultat suivant (voir [16]).

LEMME 2. *Soient* $P \in \bar{\mathbb{Q}}[x_1 : \cdots : x_n]$ *et* $Q \in \bar{\mathbb{Q}}[y_1 : \cdots : y_m]$, *alors*

$$|h(PQ) - h(P) - h(Q)| \leqslant 2(\ln(n+1) \deg P + \ln(m+1) \deg Q).$$

Si Z est un cycle équidimensionnel de $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$, on notera $h(Z)$ la hauteur (au sens précédent) de la forme de Chow de Z. Si $\varphi: V \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$ est un plongement projectif d'une variété V, on notera $h_\varphi(V)$ le réel $h(\varphi(V))$. Pour des compléments et pour les propriétés voir [14–17, et 3].

On utilisera également la hauteur de Néron–Tate (voir [11]).

2.b. *Construction d'une hauteur de Weil sur une famille*

On considère une famille $\mathscr{C}$ de courbes paramétrée par une variété projective T. Plus précisément, on suppose que:

- $\mathscr{C}$ et T sont des variétés projectives sur k,
- il existe π un morphisme plat de k-schémas $\pi: \mathscr{C} \to T$. On suppose que la fibre générique $\mathscr{C}_\eta = \mathscr{C} \times_T \operatorname{Spec} k(T)$ est une courbe lisse sur $k(\eta) \simeq k(T)$ de genre $g \geqslant 2$.

On note T^0 l'ouvert de T au-dessus duquel π est lisse.

On considère le diviseur canonique K_η de $\mathscr{C}_\eta$. Le diviseur $3K_\eta$ est très ample. On considère un plongement associé à $3K_\eta$. Celui-ci donne un modèle $\widetilde{\mathscr{C}}$ de $\mathscr{C}_\eta$ projectif sur T et il existe un ouvert T' de T au-dessus duquel les familles $\widetilde{\mathscr{C}}$ de $\mathscr{C}$ coïncident et sont plates, projectives et lisses. On note φ le plongement induit au-dessus de T'; on a $\varphi: \mathscr{C} \times_k T' \hookrightarrow \mathbf{P}^n_{T'}$. Alors le polynôme de Hilbert des fibres $\mathscr{C}_t$ au-dessus de cet ouvert T' est constant. En particulier, ces fibres sont des courbes lisses projectives de même genre g et de même degré d.

Comme φ induit pour tout $t \in T'$, le plongement $\mathscr{C}_t \xhookrightarrow{\varphi|_{\mathscr{C}_t}} \mathbb{P}^n_{k(t)}$, on peut définir pour toute extension finie k' de $k(t)$ et pour tout $Q \in \mathscr{C}_t(k')$,

$$h_{3K}(Q) := h(\varphi\,|_{\mathscr{C}_t}(Q)) = \frac{1}{[k' : \mathbb{Q}]} \sum_{v \in k'} [k'_v : \mathbb{Q}_v] \ln \max_i |x_i(Q)|_v,$$

où les x_i désignent la base de $\mathbb{P}^n$ représentant φ.

On définit alors $h_K = \frac{1}{3} h_{3K}$.

On notera N le degré de $3K_\eta$ (i.e., $N = 6g - 6$).

Remarques. 1. Pour chacune de ces fibres $\mathscr{C}_t$, la restriction $\varphi\,|_{\mathscr{C}_t}$ est un plongement associé à $3K_t$, où K_t désigne le diviseur canonique de $\mathscr{C}_t$. Le diviseur $3K_t$ détermine une hauteur de Weil sur $\mathscr{C}_t$, à $O_t(1)$ près.

Le fait de "construire" un modèle projectif $\widetilde{\mathscr{C}}$ au-dessus de T permet de fixer la hauteur de Weil pour chaque $\mathscr{C}_t$, uniformément dès qu'une hauteur a été choisie pour la fibre générique. Comme φ_η est fixé (par $3K_\eta$) à un changement de base de $\mathbb{P}^n_{k(T)}$ près (qui se caractérise par une matrice inversible d'ordre $(n+1)$ à coefficients dans $k(T)$), la hauteur de Weil pour chaque $\mathscr{C}_t$ est définie à $O(h_\tau(t)+1)$ près; où h_τ est une hauteur associée à un diviseur τ très ample sur T, fixée une fois pour toutes par le choix d'un plongement et donc positive.

De plus, nous utiliserons dans notre construction par la suite la liberté de choix du plongement de $\mathscr{C}_\eta$ associé à $3K_\eta$ (voir 5.c).

2. Bien sûr, on peut faire une construction similaire pour d'autres diviseurs amples. On a choisi le diviseur canonique pour des raisons de commodité.

2.c. *Famille des jacobiennes et diviseur thêta*

Au-dessus de l'ouvert T', on considère le schéma abélien $\mathscr{J}$ famille des jacobiennes des $\mathscr{C}_t$ (voir [12]).

Pour tout $t \in T'$, on considère le morphisme

$$\begin{aligned} j_t \colon \mathscr{C}_t &\to \mathscr{J}_t \\ Q &\mapsto c\ell((2g-2)\,Q - K_t). \end{aligned}$$

Soit i_t le plongement normalisé de $\mathscr{C}_t$ dans $\mathscr{J}_t$ défini sur une extension finie de $k(t)$, corps de définition de $\mathscr{C}_t$ par $i_t(Q) = c\ell(Q) - c_t$ où c_t est tel que $(2g-2)\,c_t = c\ell(K_t)$, alors $j_t = [2g-2] \circ i_t$.

On considère le diviseur

$$\theta'_t = \underbrace{j_t(\mathscr{C}_t) + \cdots + j_t(\mathscr{C}_t)}_{(g-1)\ fois} = [2g-2]\,\theta_t,$$

où θ_t est le diviseur thêta de $\mathscr{J}_t$ associé au plongement i_t.

On considère la hauteur de Néron–Tate $\hat{h}_{\theta'_t}$ associée θ'_t.

Pour $(z, w) \in \mathscr{J}_t(\bar{k})$, on pose $\langle z, w\rangle := \hat{h}_{\theta'_t}(z+w) - \hat{h}_{\theta'_t}(z) - \hat{h}_{\theta'_t}(w)$. Comme θ'_t est symétrique, $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique et elle induit sur $\mathcal{J}_t(\bar{k}) \otimes \mathbf{R}$ une norme euclidienne notée $|\ |$. Dans ce qui suit, pour $x, y \in \mathcal{C}_t(\bar{k})$, $\langle x, y \rangle$ désigne $\langle j_t(x), j_t(y) \rangle$ et $|x|$ désigne $|j_t(x)|$.

On considère θ' la clôture de θ'_η dans $\mathcal{J}$.

Pour t appartenant à T', le diviseur $\theta' |_{\mathcal{J}_t}$ coïncide avec le diviseur θ'_t.

2.d. *Résultat principal*

Le théorème qui suit exprime la dépendance en t de la constante γ_1 apparaissant dans le théorème de Vojta pour une famille de courbes.

THÉORÈME 2. *Soit $\mathcal{C}$ une famille plate de courbes de genre $g \geqslant 2$, paramétrée par une variété projective T définie sur un corps de nombres k, et telle que la fibre générique soit lisse et projective sur $k(T)$. Soit T^0 l'ouvert au-dessus duquel la famille est lisse. Alors il existe une constante positive $\gamma_1(\mathcal{C})$ ne dépendant que de la famille et du choix de la hauteur h_τ sur T associée à un diviseur ample τ et il existe une constante positive $\gamma_2(g)$, fonction décroissante de g, telles que pour tout point $t \in T^0(\bar{k})$ et pour toute extension finie k' de $k(t)$, on ait* $\operatorname{Card}\{x \in \mathcal{C}_t(k') \mid |x| \geqslant \gamma_1(\mathcal{C})(\sqrt{h_\tau(t)} + 1)\} \leqslant \gamma_2(g)\, 7^{\operatorname{rang} \mathcal{J}_t(k')} \leqslant \frac{55}{2}\, 7^{\operatorname{rang} \mathcal{J}_t(k')}$.

La démonstration du théorème de Faltings par Vojta et Bombieri utilise l'inégalité de Mumford et l'inégalité de Vojta (voir [1]). On donne une version uniforme de l'inégalité de Vojta et une version un peu plus forte et uniforme de l'inégalité de Mumford.

Inégalité de Mumford uniforme. Il existe C_0 ne dépendant que de φ et du plongement projectif de T associé à un diviseur ample τ telle que, pour t appartenant à $T'(k')$, si $z \neq w$, $z, w \in \mathcal{C}_t(k')$, et si $C_0(\sqrt{h_\tau(t)} + 1) \leqslant |z| \leqslant |w| \leqslant g\, |z|$ alors $\cos(z, w) := \langle z, w \rangle / |z|\, |w| < 3/4$.

Inégalité de Vojta uniforme. Il existe un ouvert $\tilde{T}$ de T, une constante C_1, ne dépendant que de φ_η et du plongement projectif de T associé à un diviseur ample τ, et une constante C_2, ne dépendant que de g, tels que, pour tout $t \in \tilde{T}$, si $C_1(1 + \sqrt{h_\tau(t)}) < |z|$ et $C_2\, |z| < |w|$, alors $\cos(z, w) < \frac{3}{4}$.

Ces inégalités donnent, par les mêmes arguments de géométrie euclidienne que ceux utilisés dans le cas d'une courbe (cf. [1]):

$$\begin{aligned}\forall t \in \tilde{T}, \quad & \operatorname{Card}\{x \in \mathcal{C}_t(k'), |x| \geqslant \max(C_0, C_1)(1 + \sqrt{h_\tau(t)})\} \\ & \leqslant (1 + \ln C_2 / \ln g)\, 7^{r_t(k')}, \quad \text{où } r_t(k') \text{ désigne le rang de } \mathcal{J}_t(k').\end{aligned}$$

Et alors, par noethérianité, on a le résultat annoncé sur T^0.

La suite de l'article est consacrée à la preuve de ces inégalités (Chaps. 3, 4, et 5) et à une application du théorème à la majoration uniforme du nombre de points rationnels pour les familles à un paramètre de courbes de genre au moins 2 dont la famille des jacobiennes est isogène à un produit de familles non isotriviales de courbes elliptiques (Chap. 6).

3. RELATIONS ENTRE DIFFÉRENTES HAUTEURS

Soient θ' et K les adhérences de θ'_η et K_η respectivement dans $\mathscr{C}' = \mathscr{C} \times_k T'$. Soit Δ la diagonale de $\mathscr{C}' \times_{T'} \mathscr{C}'$. Soit $\Delta' = (2g-2)\Delta - K \times \mathscr{C}' - \mathscr{C}' \times K$.

Comme K est relativement ample, il existe un entier r_0 tel que pour tout entier r supérieur à r_0, le diviseur $B := r(K \times \mathscr{C}' + \mathscr{C}' \times K) - \Delta'$ soit relativement très ample.

Soit φ_B un plongement associé, on pose $h_B := h \circ \varphi_B$. On définit $h_{\Delta'}(z, w) := r(h_K(z) + h_K(w)) - h_B(z, w)$ et $h_\Delta(z, w) := (1/(2g-2))(h_{\Delta'}(z, w) + h_K(z) + h_K(w))$. Soit $D = p_1^* \theta' + p_2^* \theta' - s^* \theta'$, où p_i est la i-ème projection et s le morphisme somme de $\mathscr{J} \times_{T'} \mathscr{J}$ dans $\mathscr{J}$.

Lemme 3.1. *On a pour tout $t \in T'$ les équivalences linéaires $j_t^* \theta'_t \sim (2g-2)^{(2g-1)} gK_t$ et $(j_t \times j_t)^* D_t \sim (2g-2)^{(2g-1)} \Delta'_t$.*

Preuve. Comme $j_t = [2g-2] \circ i_t$, on a $j_t^* \theta'_t \sim i^*([2g-2]^* \theta'_t)$. Or $[2g-2]^* \theta'_t = \sum_{l \in \mathrm{Ker}[2g-2]} \theta_t + l$ et $i_t^*(\theta_t + l) \sim gc_t + l$ (voir [11, Chap. 5, Th. 5.8]). Comme de plus $\sum_{l \in \mathrm{Ker}[2g-2]} l = 0$, on a la première équivalence.

Pour démontrer la deuxième, on utilise le lemme de la balançoire (voir [11, Chap. 5, Section 2]). Soit $y \in \mathscr{C}_t$. Soit f définie sur $\mathscr{C}_t$ par $f(x) = (x, y)$. Alors $f^*(\Delta_t) = y$; $f^*(K_t \times \mathscr{C}_t) = K_t$ et $f*(\mathscr{C}_t \times K_t) = 0$. Donc $f^*((2g-2)^{2g-1} \Delta'_t) = (2g-2)^{2g-2}\, y - (2g-2)^{2g-1} K_t$.

D'autre part, calculons $f^*((j_t \times j_t)^* D_t)$. Pour tout x, on a $p_1 \circ (j_t \times j_t) \circ f(x) = j_t(x)$; $p_2 \circ (j_t \times j_t) \circ f(x) = j_t(y)$, et $s \circ (j_t \times j_t) \circ f(x) = j_t(x) + j_t(y)$.

D'où $(p_1 \circ (j_t \times j_t) \circ f)^* (\theta'_t) = j_t^*(\theta'_t) \sim (2g-2)^{(2g-1)} K_t$; $(p_2 \circ (j_t \times j_t) \circ f)^* (\theta'_t) \sim 0$; et

$$(s \circ (j_t \times j_t) \circ f)^* (\theta'_t) = j_t^*(\theta'_t - j_t(y)) \sim i* \left(\sum_{l \in \mathrm{Ker}[2g-2]} (\theta_t - i_t(y) + l) \right)$$
$$\sim (2g-2)^{2g-1} (K_t - (2g-2)\, y),$$

compte-tenu de $j_t = [2g-2] \circ i_t$, de $\sum_{l \in \mathrm{Ker}[2g-2]} l = 0$ et de la relation $i_t^*(\theta_t + a) \sim gc_t + a$, valable pour tout a.

On a donc bien $f^*((j_t \times j_t)^* D_t) \sim (2g-2)^{2g-2}\, y - (2g-2)^{2g-1} K_t$. En utilisant le lemme de la balançoire et la symétrie du problème, on en déduit la deuxième relation du lemme.

Lemme 3.2. *Soit $\pi: \mathscr{V} \to T'$ une famille plate projective sur T' à fibres toutes lisses. Soient A et B deux diviseurs de $\mathscr{V}$ vérifiant $\forall t \in T'(\bar{k})$, $A|_{\mathscr{V}_t} \sim B|_{\mathscr{V}_t}$. Alors il existe une constante C positive telle que*

$$\forall P \in \mathscr{V}(\bar{k}), \qquad |h_A(P) - h_B(P)| \leqslant C(h_\tau(t) + 1).$$

Démonstration. D'après [8, Chap. III, Ex. 12.4], on a, avec les hypothèses du lemme, l'existence d'un diviseur D de T' tel que $A \sim B + \pi^* D$. Alors $h_A - h_B = h_{\pi^* D} + O(1 + h_\tau \circ \pi)$. D'après la fonctiorialité de la hauteur de Weil, $h_{\pi^* D} = h_D \circ \pi + O(1)$.

Mais, h_τ étant une hauteur associée à un diviseur très ample, on a l'existence d'une constante positive c telle $|h_D| \leqslant c(h_\tau + 1)$. D'où le lemme en combinant ces inégalités.

Lemme 3.3. *Il existe deux constantes positives α_1 et α_2 ne dépendant que de φ, et du choix de la hauteur h_τ telles que pour tout $t \in T'$, pour tout $(z, w) \in \mathscr{C}_t \times \mathscr{C}_t$,*

$$\left| \frac{1}{g(2g-2)^{2g-1}} \hat{h}_{\theta'_t}(j_t(z)) - h_K(z)) \right| \leqslant \alpha_1(h_\tau(t) + 1)$$

et

$$\left| h_{\Delta'}(z, w) - \frac{1}{(2g-2)^{(2g-1)}} \hat{h}_{D_t}(j_t \times j_t(z, w)) \right| \leqslant \alpha_2(h_\tau(t) + 1).$$

Preuve. Démontrons d'abord la première estimation. On considère le morphisme

$$\begin{aligned} j: \mathscr{C}' &\to \mathscr{J} \\ Q &\mapsto c\ell((2g-2)\, Q - K_{\pi(Q)}). \end{aligned}$$

On a $\forall t \in T'$, $(j^* \theta')|_{\mathscr{C}_t} = j_t^* \theta'_t$. On fixe $h_{(j^*\theta')|_{\mathscr{C}t}}$ par $h_{(j^*\theta')|_{\mathscr{C}t}} := h_{j^*\theta'}$.

On applique le lemme précédent à $\mathscr{V} = \mathscr{C}'$, $A = j^* \theta'$, et $B = (2g-2)^{(2g-1)}\, gK$.

On a alors l'existence d'une constante positive β telle que

$$\forall t \in T', \quad \forall x \in \mathscr{C}_t(\bar{k}), \qquad |h_{j^*\theta'}(x) - h_{(2g-2)^{(2g-1)}\, gK}(x)| \leqslant \beta(h_\tau(t) + 1).$$

Or $h_{j^*\theta'} = h'_\theta \circ j + O(h_\tau \circ \pi + 1)$ et $h_{(2g-2)^{(2g-1)}\, gK} = (2g-2)^{(2g-1)}\, g h_K + O(h_\tau \circ \pi + 1)$. Par ailleurs, un théorème de Silverman et Tate permet de comparer h'_θ et $\hat{h}_{\theta'_t}$ (voir [19, Théorème A]): il existe une constante positive β' telle que $\forall t \in T'$, $\forall x \in \mathscr{J}_t(\bar{k})$, $|h'_\theta(x) - \hat{h}_{\theta'_t}(x)| \leqslant \beta'(h_\tau(t) + 1)$. On obtient alors facilement la première estimation annoncée.

La preuve de la deuxième est similaire.

Vojta a eu l'idée d'introduire des diviseurs plus généraux que la diagonale. On considère l'analogue sur la famille. Soit $V(d_1, d_2, d) = d_1(K \times \mathscr{C}') + d_2(\mathscr{C}' + K) + d\Delta'$; où d_1, d_2 et d sont des paramètres entiers. On remarque que $V(1, 1, 1) = \Delta$.

On suppose que $\delta_1 := (d_1 + rd)/3$ et $\delta_2 := (d_2 + rd)/3$ sont des entiers.

On définit alors h_V sur $\mathscr{C}'$ au-dessus de T' par $h_V(z, w) := \delta_1 h_{3K}(z) + \delta_2 h_{3K}(w) - dh_B(z, w)$. On a $h_V(z, w) = d_1 h_K(z) + d_2 h_K(w) + dh_{\Delta'}(z, w)$.

Nota Bene. Dans ce qui suit, $c_1, ..., c_{16}$ sont des constantes positives (indépendantes de t, d_1, d_2, et d).

PROPOSITION 3.4. *Il existe c_1 telle que $\forall t \in T'$, $\forall (z, w) \in \mathscr{C}_t(\bar{k}) \times \mathscr{C}_t(\bar{k})$,*

$$h_V(z, w) \leqslant \frac{d_1}{2g(2g-2)^{2g-1}} |z|^2 + \frac{d_2}{2g(2g-2)^{2g-1}} |w|^2 - \frac{d}{(2g-2)^{2g-1}} \langle z, w \rangle + c_1(d_1 + d_2 + d)(h_\tau(t) + 1).$$

Preuve. La majoration résulte immédiatement du Lemme 3.3, compte tenu des identités $\hat{h}_{D_t} = -\langle\ ,\ \rangle$ et de $\hat{h}_{\theta'_t} = \frac{1}{2} |\ |^2$, pour tout $t \in T'$.

4. PREUVE DE L'INÉGALITÉ DE MUMFORD UNIFORME

L'idée de la preuve est de majorer la hauteur associée à la diagonale, qu'on fixe en famille, en fonction de la forme bilinéaire symétrique associée au diviseur θ' et d'utiliser que la diagonale est un diviseur relativement effectif pour obtenir une minoration.

Il résulte de la proposition précédente (compte-tenu de $\Delta = V(1, 1, 1)$):

$\forall t \in T', \quad \forall (z, w) \in \mathscr{C}_t(\bar{k}) \times \mathscr{C}_t(\bar{k}),$

$$h_\Delta(z, w) \leqslant \frac{1}{2g(2g-2)^{2g-1}} (|z|^2 + |w|^2) - \frac{1}{(2g-2)^{2g-1}} \langle z, w \rangle + c_2(h_\tau(t) + 1).$$

LEMME 4.1. *Il existe une constance $\alpha_4 > 0$ telle que pour tout $t \in T'$ et pour tous $z, w \in \mathscr{C}_t$ tels que $z \neq w$, on ait $h_\Delta(z, w) \geqslant -\alpha_4(h_\tau(t) + 1)$.*

Preuve. Le diviseur Δ est relativement effectif au-dessus de T', car il est effectif sur toute fibre (cf. [Mi2, Prop. 3.8]). Alors d'après [Mi2, Rem. 3.6], le faisceau $\mathcal{O}(\Delta)$ associé à Δ admet une section globale s. Soient alors A et C deux diviseurs relativement très amples sur T' tels que $\Delta = A - C$. Soit $y_0, ..., y_m$ une base de $\mathcal{O}(C)$. On complète l'ensemble $(sy_0, ..., sy_m)$ des sections globales de $\mathcal{O}(A)$ en une base $(sy_0, ..., sy_m, \sigma_1, ..., \sigma_l)$ de sections globales de $\mathcal{O}(A)$. Alors pour tout point (z, w) tel que $s(z, w) \neq 0$, on a $h((sy_0 : \cdots : sy_m : \sigma_1 : \cdots : \sigma_l)(zw)) \geqslant h((y_0 : \cdots : y_m)(z, w))$. Mais $|h_\Delta - (h(sy_0 : \cdots : sy_m : \sigma_1 : \cdots : \sigma_l) - h(y_0 : \cdots : y_m))| \leqslant c_3(h_\tau(t)+1)$. D'où le résultat.

De la majoration de h_Δ et de la minoration de h_Δ ci-dessus, on tire $\forall (z, w) \in \mathscr{C}_t \times \mathscr{C}_t(\bar{k})$ tel que $z \neq w$,

$$\frac{\langle z, w \rangle}{|z|\ |w|} \leqslant \frac{1}{2g}\left(\frac{|z|}{|w|} + \frac{|w|}{|z|}\right) + c_4 \frac{(h_\tau(t)+1)}{|z|\ |w|}.$$

Posons $\alpha = |z|/|w|$. On suppose que $|z| \leqslant |w| \leqslant g\ |z|$. Alors $(1/g) \leqslant \alpha \leqslant 1$ et $\alpha + \alpha^{-1} \leqslant g + (1/g)$ et $1/|z|\ |w| \leqslant 1/|z|^2$.

Soit $C_0 = 3\sqrt{c_4}$. Alors si $|z| \geqslant C_0(\sqrt{h_\tau(t)} + 1)$, on a

$$\frac{\langle z, w \rangle}{|z|\ |w|} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2g^2} + \frac{1}{9}.$$

D'où l'inégalité annoncée compte-tenu de $g \geqslant 2$.

5. PREUVE DE L'INÉGALITÉ DE VOJTA UNIFORME

Dans la majoration de h_V obtenue à la Proposition 3.4, la forme quadratique qui apparaît n'est pas définie positive dès que $d_1 d_2 < g^2 d^2$. La difficulté est d'obtenir une minoration du type: $h_V(z, w) \geqslant -c_5(d_1 + d_2 + d)(h_\tau(t)+1)$ pour z et w sur la même fibre et où la constante ne dépend que de la famille.

L'idée est de construire pour chaque $t \in T'$ une section s de $\mathcal{O}(V_t)$ en suivant la méthode de Vojta–Bombieri, dont on contrôlera la taille en fonction des paramètres t, d_1, d_2 et d.

5.a. *Minoration de h_V*

Dans cette partie, on suit la méthode de Bombieri ([1]) en travaillant sur une fibre.

Soit $t \in T'(\bar{k})$. Soit s une section de $\mathcal{O}(V_t)$. Soit s_1 une section de $\mathcal{O}(dB_t)$. Alors $s_1 s$ est une section de $\mathcal{O}(\delta_1(3K_t) \times_{k(t)} \mathscr{C}_t + \delta_2 \mathscr{C}_t \times_{k(t)} 3K_t)$.

Pour d assez grand, d'après le lemme d'Enriques-Severi, s_1 est la restriction à $\mathscr{C}_t \times \mathscr{C}_t$ d'une forme $G(y)$ homogène de degré d en $(m+1)$ variables, à coefficients dans $k(t)$.

De même, pour δ_1 et δ_2 suffisamment grands, $s_1 s$ est la restriction à $\mathscr{C}_t \times \mathscr{C}_t$ d'une forme $F(x, x')$ bihomogène de bidegré δ_1, δ_2 en $x_0, ..., x_n$, $x'_0, ..., x'_n$, à coefficients dans $k(t)$.

Pour chaque s_1 parmi les y_i^d $(i=0, ..., m)$ (où les y_i sont les coordonnées de $\mathbb{P}_T^m$ correspondant au plongement associé à B), que l'on restreint à $\mathscr{C}_t$, on obtient une forme $F_i(x, x')$ de bidegré (δ_1, δ_2) à coefficients dans $k(t)$ telle que $s=(F_i(x, x')/y_i^d)|_{\mathscr{C}_t \times \mathscr{C}_t}$.

Et inversement des formes $F_i(x, x')$ de bidegré (δ_1, δ_2) à coefficients dans $k(t)$ qui vérifient $(F_i(x, x')\ y_j^d) = (F_j(x, x')\ y_i^d)|_{\mathscr{C}_t \times \mathscr{C}_t}$, pour $i, j=0, ..., m$, donnent une section s. Soit $(z, w) \in \mathscr{C}_t \times \mathscr{C}_t$.

(a) Cas où $s(z, w) \neq 0$.

Lemme 5.1 (cf. [1, Lemme 3]). *Si on note $\mathscr{F}=\{F_i\}$ les polynômes associés à s, $h_V(z, w) \geqslant -h(\mathscr{F})-n \ln((\delta_1+n)(\delta_2+n)$; où $h(\mathscr{F})=1/[k(t):\mathbb{Q}] \sum_v \delta_v \max \ln |$coefficients de $F_i|_v$.*

(b) Cas où $s(z, w)=0$. On utilise des dérivations afin d'obtenir une fonction ne s'annulant pas en (z, w). Soit ζ un paramètre local pour $\mathscr{C}_t$ en z. Soit ζ' un paramètre local pour $\mathscr{C}_t$ en w.

Notons $\xi_{i,j}=(x_i/x_j)|_{\mathscr{C}}$, $\xi_{i,j}^t=\xi_{i,j}|_{\mathscr{C}_t}$, et ξ_j le vecteur de coordonnées $\xi_{i,j}$, avec $i=0, ..., n$. On ajoutera un $'$ pour les notations relatives à la deuxième copie de $\mathscr{C}_t$.

Notons $\eta_{i,j}=(y_i/y_j)|_{\mathscr{C}}$. Soit $s=F_i(x, x')/_{y_i^d}|_{\mathscr{C}_t \times \mathscr{C}_t}$ une section globale de $\mathscr{O}(V_t)$. Supposons que $\xi_{i,0}$, $\xi'_{i,0}$ et $\eta_{i,0}$ n'ont pas de zéros ni de pôles respectivement en z, w et (z, w).

On considère $g=(s/x_0^{\delta_1} x_0'^{\delta_2} y_0^{-d})|_{\mathscr{C}_t \times \mathscr{C}_t}=(F_i(\xi_0, \xi'_0)/\eta_{i0}^d)|_{\mathscr{C}_t \times \mathscr{C}_t}$. Alors, g est une fonction rationnelle de $\mathscr{C}_t \times \mathscr{C}_t$ qui est régulière sur un voisinage de (z, w). On peut la différentier par rapport à ζ, ζ'. Notons

$$\partial_i=\frac{1}{i!}\left(\frac{d}{d_\zeta}\right)^i, \qquad \partial'_i=\frac{1}{i!}\left(\frac{d}{d_{\zeta'}}\right)^i.$$

Définition. Un couple (i_1^*, i_2^*) d'entiers est dit admissible pour g et (z, w) si

(a) $\partial_{i_1^*} \partial'_{i_2^*} g(z, w) \neq 0$;

(b) pour tout couple d'entiers (i_1, i_2) distinct de (i_1^*, i_2^*) tel que $i_1 \leqslant i_1^*$, $i_2 \leqslant i_2^*$, on a $\partial_{i_1} \partial'_{i_2} g(z, w)=0$.

On a alors la minoration suivante.

Lemme 5.2 (cf. [1, Lemme 4]).

$$
\begin{aligned}
h_V(z, w) \geqslant & -h(\mathscr{F}) - n \ln((\delta_1+n)(\delta_2+n)) \\
& -\frac{1}{[k' : \mathbb{Q}]} \sum_v \max\left(\sum_\lambda \max_v \,[k'_v : \mathbb{Q}_v] \ln |\partial_{i_\lambda} \xi_{v,j}(0)|_v\right) \\
& -\frac{1}{[k' : \mathbb{Q}]} \sum_v \max\left(\sum_\lambda \max_v \,[k'_v : \mathbb{Q}_v] \ln |\partial'_{i_\lambda} \xi'_{v,j'}(0)|_v\right) \\
& -(\delta_1+\delta_2+i_1^*+i_2^*)
\end{aligned}
$$

où v parcourt les places de l'extension finie k' de $k(t)$, et les maxima sont pris sur toutes les partitions $\{i_\lambda\}$ et $\{i'_\lambda\}$ de i_1^* et i_2^*, et où $j = j_v$ et $j' = j'_v$ sont tels que $|\xi_{v,j}(0)|_v^{[k'_v : \mathbb{Q}_v]/[k' : \mathbb{Q}]} \leqslant 1$ et $|\xi'_{v,j'}(0)|_v^{[k'_v : \mathbb{Q}_v]/[k' : \mathbb{Q}]} \leqslant 1$.

Nous allons dans la suite estimer chacun des termes de cette inégalité.

5.b. *Estimation des dérivées*

Il s'agit ici d'estimer $A(z) = (1/[k' : \mathbb{Q}]) \sum_v \max(\sum_\lambda \max_v [k'_v : \mathbb{Q}_v] \ln |\partial_{i_\lambda} \xi_{v,j}(0)|_v)$. On veut expliciter la dépendance en le point z et en le paramètre t. A cet effet, on fait une construction géométrique en famille et on utilise plusieurs lemmes sur les hauteurs de variétés projectives pour estimer la hauteur de la fibre au-dessus de t de la variété obtenue en fonction de $h_\varphi(\mathscr{C}_t)$. Ceci permet de majorer $A(z)$ en fonction de $h_\varphi(\mathscr{C}_t)$, de $h_{3K}(z)$ et i_1^*. Puis on majorera $h_\varphi(\mathscr{C}_t)$ en fonction de $h_\tau(t)$.

• *Choix du plongement φ_η et construction géométrique.* Rappelons que le modèle projectif $\tilde{\mathscr{C}}$ de C_η est relatif au choix de la base de $\mathcal{O}(3K_\eta)$ donnant le plongement $\varphi_\eta : C_\eta \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{k(T)}$ et que cette base étant choisie on a, pour $t \in T'(\bar{k})$, le plongement $\varphi_t : \mathscr{C}_t \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{k(t)}$ qui se déduit par restriction de $\varphi : \mathscr{C}' \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{T'}$. Nous allons ici choisir cette base. Nous choisissons les coordonnées x_i de $\mathbb{P}^n$ telles que:

- pour tous $v, j = 0, ..., n$, $v \neq j$, la projection $p_{v,,j}$:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathscr{C}_\eta & \to & \mathbb{P}^1_{k(T)} \\
(x_0 : \cdots : x_n) & \mapsto & (x_v : x_j)
\end{array}
$$

soit définie partout sur $\mathscr{C}_\eta$ et de degré $N = \deg(3K) = 6(g-1)$;

- pour tout $j \neq 0$, a, la projection $\Phi_{a,j}$:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathscr{C}_\eta & \to & \mathbb{P}^2_{k(T)} \\
(x_0 : \cdots : x_n) & \mapsto & (x_0 : x_a : x_j)
\end{array}
$$

soit un morphisme birationnel de $\mathscr{C}_\eta$ dans son image.

On considère les morphismes rationnels de T'-schémas suivants:

$$\begin{array}{ccccc} & p_{1,0}\times p_{v,j} & & \text{Segre} & \\ \mathscr{C}' & \to & \mathbb{P}^1_{T'}\times\mathbb{P}^2_{T'} & \hookrightarrow & \mathbb{P}^3_{T'} \\ (x_0 x_1 : \cdots : x_n) & \mapsto & (x_1 : x_0), (x_v : x_j) & \mapsto & (x_1 x_v : x_1 x_j : x_0 x_v : x_0 x_j) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & p_{1,2,3} & \\ \mathbb{P}^3_{T'} & \to & \mathbb{P}^2_{T'} \\ (x_1 x_v) : x_1 x_j : x_0 x_v : x_0 x_j) & \mapsto & (x_1 x_j : x_0 x_v : x_0 x_j). \end{array}$$

Pour tous v, j tels que $v \neq j$, la projection $p_{v,j}$ est définie au-dessus d'un ouvert de T'. Supposons que $\mathscr{C}_t$ appartienne à l'ensemble des fibres où tous les $p_{v,j}$ sont définies. On a alors, pour $j \neq 0$ et $v \neq j$, les morphismes:

$$\begin{array}{ccccccc} & p_{1,0}\times p_{v,j} & & \text{Segre} & & p_{1,2,3} & \\ \mathscr{C}_t & \to & \mathbb{P}^1_k(t)\times\mathbb{P}^1_k(t) & \hookrightarrow & \mathbb{P}^3_k(t) & \to & \mathbb{P}^2_k(t). \end{array}$$

Notons $\mathscr{C}_t^{v,j}$ le cycle $p_{1,2,3}\circ S\circ(p_{1,0}\times p_{v,j})_*\mathscr{C}_t$. On a que $\mathscr{C}_t^{v,j}$ est une courbe plane donnée par l'annulation d'un polynôme $g_t^{v,j}$ homogène en les variables $x_1 x_j$, $x_0 x_v$, $x_0 x_j$ et à coefficients dans $k(t)$. Notons $G_t^{v,j}$ le polynôme en deux variables $(x_1/x_0, x_v/x_j)$ (i.e., avec les notations précédentes en $(\xi_{1,0}, \xi_{v,j})$) "déshomogénéisé," obtenu en divisant $g_t^{v,j}$ par $(x_0 x_j)^{d_t^{v,j}}$ où $d_t^{v,j}$ désigne le degré de $g_t^{v,j}$.

Avec cette construction et ces notations, on obtient le lemme suivant.

Lemme 5.3 (Majoration des dérivées). *Soit t tel que $p_{v,j}$ soit défini sur $\mathscr{C}_t$ pour tous v, j entiers avec $v \neq j$. Soit l'ensemble fini*

$$Z_t = \{z \in \mathscr{C}_t(\bar{k}) \mid (x_0(z) = 0) \text{ ou } (\text{il existe } (v, j) \text{ tel que } j \neq 0,\ v \neq j \text{ et } \partial_2 G_t^{v,j}(\xi_{1,0}, \xi_{v,j}) = 0)\}.$$

Pour tout $z \in \mathscr{C}_t(\bar{k})\backslash Z_t$, $A(z) \leqslant 4 i_1^* n^2 h(G_t) + i_1^*(2 d_0(n^2+5)) + 6 n^2 d_0 i_1^* h_{3K}(z)$ où $h(G_t)$ désigne un majorant des hauteurs des polynômes $G_t^{v,j}$ avec v, $j \in \{0, ..., n\}$, $j \neq 0$, $v \neq j$ et des hauteurs de leur polynôme dérivé par rapport à la deuxième variable $\xi_{v,j}$, et où d_0 est un majorant des degrés des $G_t^{v,j}$.

Démonstration. Ce lemme résulte de la preuve du Lemme 6 dans [1] via le théorème d'Eisenstein donné dans [1, Lemme 5]. Précisément, si on pose $P_t^{v,j}(\zeta, \xi) = G_t^{v,j}(\zeta + x_1(z)/x_0(z), \xi)$, on a d'après la démonstration du Lemme 6 dans [1],

$$A(z) \leqslant 2 i_i^* \sum_{v,j} (h(P_t^{v,j}) + h(\partial_2 G_t^{v,j}(\xi_{1,0}(z), \xi_{v,j}(z)))) + 5 i_1^* \ln(2 d_0).$$

Or $h(\partial_2 G_t^{v,j}(\xi_{1,0}(z), \xi_{v,j}(z))) \leqslant h(G_t) + d_0(h(\xi_{1,0}(z)) + h(\xi_{v,j}(z))) + 2\ln(d_0+1)$ et $h(P_t^{v,j}) \leqslant h(G_t) + d_0(h(\xi_{1,0}(z)) + \ln(d_0+1)$. D'où le résultat en utilisant le fait que $h(\xi_{1,0}(z)) \leqslant h_{3K}(z)$ et $h(\xi_{v,j}(z)) \leqslant h_{3K}(z)$.

• *Estimation de d_0 et de $h(G_t)$.* Le plongement de Segre sera noté S dans ce qui suit. On a $\deg G_t^{v,j} \leqslant \deg \mathscr{C}_t^{v,j} = \deg S \circ (p_{1,0} \times p_{v,j})_* \mathscr{C}_t = 2\deg_\varphi \mathscr{C}_t = 12(g-1)$. D'où $d_0 = 12(g-1)$ est un majorant du degré de $G_t^{v,j}$.

Lemme. *On a $h(\mathscr{C}_t^{v,j}) \leqslant 4h_\varphi(\mathscr{C}_t) + 16N \ln 2$.*

Preuve du Lemme. Pour démontrer le lemme, on utilise le fait qu'essentiellement la hauteur diminue après projection (voir [2, 6], pour des démonstrations utilisant la théorie de l'intersection). Dans le langage des hauteurs définies via les formes de Chow, on a le résultat suivant.

Fait. Soit $V \hookrightarrow \mathbb{P}_k^n$, $r = \dim(V) \leqslant n-1$. On suppose que le point $(0:0:\cdots:0:1)$ n'appartient pas à V. Soit π_n la projection de centre le point $(0:0:\cdots:0:1)$, alors définie sur V. Alors, $\deg(\pi_{n*}V) = \deg(\pi_n)\deg(\pi_n(V)) = \deg(V)$, $h(\pi_{n*}V) \leqslant h(V)$ et $h(\pi_n(V)) \leqslant h(V) + 2\deg(V)(r+1)\ln(n+1)$.

En effet, on vérifie que si f_V, $f_{\pi_n(V)}$ et $f_{\pi_{n*}(V)}$ désignent des formes de Chow de V, $\pi_n(V)$ et $\pi_{n*}(V)$, respectivement, on a $f_{\pi_{n*}(V)} = f_{\pi_n(V)}{}^{\deg \pi_n} = f_V((\cdot, 0), ..., (\cdot, 0))$. Donc $h(\pi_{n*}V) \leqslant h(V)$ et $h(\pi_{n*}V) = h(f_{\pi_n(V)}{}^{\deg \pi_n}) \geqslant \deg \pi_n h(\pi_n(V)) - 2\deg(V)(r+1)\ln(n+1)$, d'après le Lemme 2.

Alors, $h((p_{1,2,3} \circ S \circ (p_{1,0} \times p_{v,j}))_* \mathscr{C}_t) \leqslant h((S \circ (p_{1,0} \times p_{v,j}))_* \mathscr{C}_t)$.

Or la hauteur est fonctorielle et multilinéaire (voir [7] pour une preuve via la théorie de l'intersection et [3] pour une démonstration via les (multi)-formes de Chow). On a $h((S \circ (p_{1,0} \times p_{v,j}))_* \mathscr{C}_t) = 4h_\varphi(\mathscr{C}_t) + O(d_0)$. Soyons plus précis. Soit F une forme de Chow de $S \circ (p_{1,0} \times p_{v,j})_* \mathscr{C}_t$. Alors,

$$
\begin{aligned}
&F(\xi_0\eta_v, \xi_0\eta_j, \xi_1\eta_v, \xi_1\eta_j; \xi'_0\eta'_v, \xi'_0\eta'_j, \xi'_1\eta'_v, \xi'_1\eta'_j) \\
&\quad = F_{\mathscr{C}_t}(\xi_0, \xi_1, 0, ..., 0; \xi'_0\xi'_1, 0, ..., 0) \\
&\qquad \times F_{\mathscr{C}_t}(\xi_0, \xi_1, 0, ..., 0; 0, ..., 0, \eta'_v, 0, ..., 0, \eta'_j, 0, ..., 0) \\
&\qquad \times F_{\mathscr{C}_t}(0, ..., 0, \eta_v, 0, ..., 0, \eta_j, 0, ..., 0; \xi'_0, \xi'_1, 0, ..., 0) \\
&\qquad \times F_{\mathscr{C}_t}(0, ..., 0, \eta_v, 0, ..., 0, \eta_j, 0..., 0; 0, ..., 0, \eta'_v, 0, ..., 0, \eta'_j, 0, ..., 0);
\end{aligned}
$$

où $F_{\mathscr{C}_t}$ est une forme de Chow de $\varphi(\mathscr{C}_t)$.

En effet on vérifie que chacun des polynômes du membre de droite divise celui de gauche et les degrés sont égaux puisque $\deg(S \circ (p_{1,0} \times p_{v,j}))* \mathscr{C}_t = 2\deg_\varphi \mathscr{C}_t = 12(g-1)$. Alors on obtient $h(F) \leqslant 4h_\varphi(\mathscr{C}_t)) + 16(\ln 2)\deg_\varphi(\mathscr{C}_t)$, en utilisant le Lemme 2. D'où le résultat.

Chaque $\mathscr{C}_t^{v,j}$ est une courbe plane. Or la hauteur d'une hypersurface est essentiellement la hauteur de son équation. Précisément, si $H \hookrightarrow \mathbb{P}_k^n$ est une hypersurface d'équation f, alors $\deg(H) = \deg f$ et $h(f) \leqslant h(H) \leqslant h(f) + \ln(n!)(n+1)\deg(f)$. En effet la forme de Chow $C(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, polynôme en n mutlivariables $\alpha_i \in \check{\mathbb{P}}_k^n$ de H est $f(\Delta_0, \Delta_1, ..., \Delta_n)$ où Δ_i est le déterminant de la matrice obtenue en enlevant la i-ème colonne à la matrice $(\alpha_{i,j})_{i \in \{1, ..., n\}, j \in \{0, ..., n\}}$. D'où $h(G_t^{v,j}) \leqslant h(\mathscr{C}_t^{v,j})$.

Par ailleurs, $h(\partial_1 G_t^{v,j}) \leqslant h(G_t^{v,j}) + \ln(\deg(\mathscr{C}_t^{v,j}))$. Donc on peut prendre comme majorant $h(G_t) = 4h_\varphi(\mathscr{C}_t) + 17N \ln 2$.

Remarque. Comme $\mathscr{C}_\eta$ est plongée dans $\mathbb{P}^n_{k(T)}$, $\xi_{1,0}, ..., \xi_{n,0}$ engendrent le corps des fractions rationnelles de $\mathscr{C}_\eta$. On peut supposer que $\xi_{1,0}$ est une base de transcendance. Alors $k(T)(\mathscr{C}_\eta)$ est en extension algébrique de degré N qui est le degré de $\mathscr{C}_\eta$ dans $\mathbb{P}^n_{k(T)}$ de $k(T)(\xi_{1,0})$. Comme pour $v = 0, ..., n$, $v \neq j$, $\xi_{v,j}$ appartient à $k(T)(\mathscr{C}_\eta)$, il existe une relation de dépendance algébrique entre $\xi_{v,j}$ et $\xi_{1,0}$, de degré inférieur ou égal à N à coefficients dans $k(T)$, notons-la $f_{v,j}(\xi_{1,0}) = 0$. Pour chaque t appartenant à $T(\bar{k})$, sauf un nombre fini d'entre eux, cette relation induit une relation $f^t_{v,j}(\xi^t_{v,j}, \xi^t_{1,0})$ obtenue par spécialisation (où $\xi^t_{v,j}$ désigne $\xi_{v,j}|_{C_t}$). La méthode de Bombieri donne alors: pour presque tout $t \in T(\bar{k})$, pour presque tout $z \in \mathscr{C}_t(\bar{k})$, $A(z) \leqslant 4i_1^* n^2 h(F_t) + i_1^*((n^2+5)\, 24(g-1)) + 72(g-1)\, n^2 i_1^* h_{3K}(z)$, avec $h(F_t) = \max_{v,j} h(f^t_{v,j})$. Le polynôme $f^t_{v,j}$ étant obtenu par spécialisation de $f_{v,j}$, il existe deux constantes positives a et b indépendantes de t telles que $h(F_t) \leqslant a h_\tau(t) + b$. Cependant, la construction de courbes planes $\mathscr{C}^t_{v,j}$ offre l'avantage de donner une borne $h(G_t)$ explicite en fonction de $h_\varphi(\mathscr{C}_t)$, hauteur projective de la fibre $\mathscr{C}_t$.

- *Minoration de h_V.*

Lemme 5.4. *Il existe une constante positive c_6 et un ouvert $\tilde{T}$ de T tels que $\forall t \in \tilde{T}(\bar{k})$, $\forall (z, w) \in \mathscr{C}_t \times \mathscr{C}_t(\bar{k}) \backslash Z_t$,*

$$h_V(z, w) \geqslant -h(\mathscr{F}) - n \ln((\delta_1 + n)(\delta_2 + n)) - (\delta_1 + \delta_2)$$
$$- \frac{18 n^2 N}{g(2g-2)^{2g-1}} (i_1^* |z|^2 + i_2^* |w|^2) - c_6 (i_1^* + i_2^*)(h_\tau(t) + 1);$$

où Z_t est l'ensemble fini défini au Lemme 5.3.

Preuve. En appliquant le Lemme 5.3 aux points z et w et en reportant les estimations de $A(z)$ et de $A(w)$ obtenues dans l'inégalité du Lemme 5.2, on obtient

$$h_V(z,w) \geqslant -h(\mathscr{F}) - n\ln((\delta_1+n)(\delta_2+n)) - (\delta_1+\delta_2+i_1^*+i_2^*)$$
$$-(i_1^*+i_2^*)\,16n^2 h_\varphi(\mathscr{C}_t) - (i_1^*+i_2^*)(68Nn^2\ln 2+(n^2+5)\,4N)$$
$$-12n^2Ni_1^*h_{3K}(z) - 12n^2Ni_2^*h_{3K}(w);$$

compte-tenu des valeurs de d_0 et de $h(G_t)$.

Par ailleurs, $h_K(z) \leqslant (1/2g(2g-2)^{2g-1})\ |z|^2 + \alpha_1(h_\tau(t)+1)$ d'après le Lemme 3.3 et l'expression de $\hat{h}_{\theta'_t}$. Estimons maintenant $h_\varphi(\mathscr{C}_t)$ en fonction de $h_\tau(t)$.

Proposition 5.5. *Soit $\varphi\colon \mathscr{V} \hookrightarrow \mathbb{P}^n_T$; soit $\varphi_\tau\colon T \hookrightarrow \mathbb{P}^l_k$, avec $\mathscr{V}$ plate sur T. Alors, il existe une constante $C>0$, ne dépendant que de la famille, de φ et de φ_τ, telle que*

$$\forall t \in T(\bar{k}), \quad h_\varphi(\mathscr{V}_t) \leqslant C(h_{\varphi_\tau}(t)+1).$$

Pour démontrer cette majoration, donnons d'abord un lemme.

Lemme 5.6. *Les formes de Chow des V_t peuvent être vues comme des points d'un espace projectif $\mathbb{P}^L(\bar{k})$. L'application qui à $t \in T(\bar{k})$ associe la forme de Chow de $\mathscr{V}_t$ dans $\mathbb{P}^L(\bar{k})$ est définie par un morphisme f défini sur k de T dans $\mathbb{P}^L_k$.*

Preuve du Lemme 5.6. On considère la sous-variété de $\mathscr{V} \times_T (\check{\mathbb{P}}^n)^{r+1} \times_k T$ définie par incidence:

$$\{(x, (\xi^{(0)}, ..., \xi^{(r)}, t)) \text{ tels que } x \in \mathscr{V}_t \cap \xi^{(0)} \cap \cdots \cap \xi^{(r)}\}.$$

On considère Γ sa projection sur $(\check{\mathbb{P}}^n)^{r+1} \times_k T$.

Alors par construction, Γ est une famille plate d'hypersurfaces paramétrée par T et par compatibilité par tout changement de base (voir [13, Chap. 5.4] ou [2, Remarque 4.3.2.i]), on a que pour chaque $t \in T$, la fibre Γ_t est l'hypersurface de Chow associée à $\mathscr{V}_t$.

Plus précisément, par définition du schéma de Hilbert (voir par exemple de [13, Chap. 0.5]) et comme $\mathscr{V} \subset \mathbb{P}^n_T$ est plat sur T, on dispose d'un morphisme $f_1\colon T \to \mathrm{Hilb}^P_{\mathbb{P}^n}$, défini sur k tel que pour tout $t \in T(\bar{k})$, $f_1(t) = \mathscr{V}_t$; (où $\mathrm{Hilb}^P_{\mathbb{P}^n}$ désigne le schéma de Hilbert sur $\mathbb{P}^n$ associé au polynôme de Hilbert P). C'est-à-dire $\mathscr{V}$ est vu comme point de $\mathrm{Hilb}^P_{\mathbb{P}^n}$ à valeurs dans T.

De plus, on dispose d'un morphisme canonique f_2 qui a un point géométrique du schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^P_{\mathbb{P}^n}$ correspondant à un cycle effectif Z de $\mathbb{P}^n$ de polynôme de Hilbert P associe la forme de Chow de Z et ce morphisme est fonctoriel (compatible à tout changement de base); voir [13, Chap. 5.4, Conclusion 5.10]. Pour tout $t \in T$, ce morphisme associe à

$\mathscr{V}_t$ sa forme de Chow. Alors le morphisme f sur k composé de f_1 et f_2 définit l'application voulue.

Preuve de la Proposition 5.5. On a alors, si on note h la hauteur de Weil sur $\mathbb{P}^L(\bar{k})$, pour tout $t \in T(\bar{k})$, $h_\varphi(\mathscr{V}_t) = h(f(t)) = h_{f^*\mathcal{O}(1)}(t) + O(1)$, par fonctiorialité de la hauteur.

Alors, d'après [11, Prop. 4.5.4], il existe une constante C_0, telle que pour tout $t \in T(\bar{k})$, $h_{f^*\mathcal{O}(1)}(t) \leqslant C_0(h_{\varphi_\tau}(t) + 1)$. D'où la majoration.

D'après la Proposition 5.5, il existe c_7 ne dépendant que de φ_τ et de φ telle que $h(\mathscr{C}_t) \leqslant c_7(h_\tau(t) + 1)$.

En reportant ces estimations dans l'inégalité ci-dessus, on obtient l'inégalité annoncée au Lemme 5.4.

On peut majorer la hauteur des points exclus dans le Lemme 5.4.

Lemme 5.7. *Pour tout t élément de $\tilde{T}$, le cardinal de Z_t est majoré par $2Nn^2$, et on a*: $\forall z \in Z_t(\bar{k})$, $h_{3K}(z) \leqslant 6Nh_\varphi(\mathscr{C}_t) + 17N^2 \ln 2 + 8N^2 \ln(n+1)$.

Preuve. Soit $z \in \mathscr{C}_t(k') \cap (x_0 = 0)$. On voit que $\mathscr{C}_t(k') \cap (x_0 = 0)$ est un cycle effectif de dimension 0. On le note $\sum n_i z_i$. La forme de Chow de ce cycle est le produit des formes de Chow des points du support comptés avec leur multiplicité. D'où, d'après le Lemme 2,

$$\left| h\left(\sum n_i z_i\right) - \sum n_i h(z_i) \right| \leqslant 2 \deg(\mathscr{C}_t) \ln(n+1).$$

D'après [17, III] (théorème de Bezout arithmétique), on a $h(\sum n_i z_i) \leqslant h_\varphi(\mathscr{C}_t) + 2\ln(n+1)\deg(\mathscr{C}_t)$. D'où, avec $N = \deg(\mathscr{C}_t)$,

$$h(z_i) \leqslant \sum n_i h(z_i) \leqslant h_\varphi(\mathscr{C}_t) + 4N \ln(n+1).$$

Soit $z \in \mathscr{C}_t(k') \cap (\partial_2 g_{v,j} = 0)$. Le même raisonnement (via le théorème de Bezout arithmétique) nous donne

$$\begin{aligned} h(z) \leqslant h_\varphi(\mathscr{C}_t) \deg(\partial_2 g_{v,j}) + \deg_\varphi(\mathscr{C}_t)\, h(\partial_2 g_{v,j}) \\ + 4\ln(n+1) \deg_\varphi(\mathscr{C}_t) \deg(\partial_2 g_{v,j}). \end{aligned}$$

Comme $\deg(\mathscr{C}_t) = N$, $\deg(g_{v,j}) = 2N$, et $h(\partial_2 g_{v,j}) \leqslant 4h_\varphi(\mathscr{C}_t) + 17N\ln(2)$, on a $h(z) \leqslant h_\varphi(\mathscr{C}_t)\, 6N + 17N^2 \ln 2 + 8N^2 \ln(n+1)$.

5.c. *Estimation de $h(\mathscr{F})$: application du lemme de Siegel*

On notera ξ_i pour $\xi_{i,0}$ et η_i pour $\eta_{i,0}$. On peut supposer que ξ_2 est entier de degré N sur $k(T)(\xi_1)$. Alors le corps des fonctions de $\mathscr{C}_\eta \times \mathscr{C}_\eta$ est $k(T)(\mathscr{C}_\eta \times \mathscr{C}_\eta) = k(T)(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2)$.

Comme η_i appartient à $k(T)(\mathscr{C}_\eta \times \mathscr{C}_\eta)$, il existe P_i et Q_i deux polynômes à coefficients dans $k(T)$ tels que $\eta_i = P_i(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2)/Q_i(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2)$.

Les coefficients de P_i et Q_i définissent des morphismes sur un ouvert U_i de T. Pour tout t appartenant à $\bigcap_{0 \leqslant i \leqslant m} U_i$, les équations décrivant s (cf. Section 5.A) s'écrivent:

$$(P_i Q_j)^d F_j |_{C_t \times \mathscr{C}_t} = (P_j Q_i)^d F_i |_{\mathscr{C}_t \times \mathscr{C}_t}$$

pour tous i, j variant de 0 à m.

En suivant les idées de Bombieri, qui utilise le lemme de Siegel, on regarde ce système d'équations comme un système linéaire en les coefficients des F_i.

Lemme de Siegel (Voir [18, Chap. I.9]). *Soit L une extension algébrique de $\mathbb{Q}$ de degré d. Soient M équations linéaires à coefficients dans L: $\sum_{i=1}^N a_{i,j} x_i = 0$, j variant de 1 à M. On suppose que $N > dM$. On note $h(a)$ le maximum des hauteurs de ces équations. Alors il existe une solution au système $x \in \mathbb{Z}^N$ de hauteur*

$$h(x) \leqslant \frac{dM}{N - dM} \left(\frac{\ln N}{2} + h(a) \right).$$

Il assure l'existence de solutions à un système linéaire de hauteur contrôlée en fonction de la hauteur des coefficients du système et des dimensions des inconnues et des solutions.

• *Écriture du système et majoration de la hauteur de ses équations.* On sait que $\xi_2^N = A_0(\xi_1) + \cdots + A_{N-1}(\xi_1)\, \xi_2^{N-1}$, avec A_i polynôme de degré inférieur ou égal à $(N-i)$ à coefficients dans $k(T)$. En fait, cette équation est celle de l'image par $\Phi_{1,2}$ de C_η. Et pour t appartenant à l'ouvert de T (contenant l'ouvert $\tilde{T}$ du paragraphe précédent) au-dessus duquel $\Phi_{1,2}$ est défini et si $(1:0:0) \notin \Phi_{1,2}(\mathscr{C}_t)$ on a l'équation: $\xi_2^N |_{\mathscr{C}_t} = a_0^t(\xi_1) + \cdots + a_{N-1}^t(\xi_1)\, \xi_2^{N-1} |_{\mathscr{C}_t}$ où les a_i sont des polynômes de degré inférieur ou égal à $(N-i)$ à coefficients dans $k(t)$.

On a alors $h(a^t) := (1/[k(t):\mathbb{Q}] \sum_v \delta_v \max_i \ln \max|\text{coefficients de } a_i^t|_v \leqslant h(\Phi_{1,2}(\mathscr{C}_t)$ (car la hauteur d'une hypersurface est supérieure ou égale à la hauteur de son équation) et $h(\Phi_{1,2}(\mathscr{C}_t)) \leqslant h_\varphi(\mathscr{C}_t)$, d'après le comportement de la hauteur par projection.

On vérifie par récurrence que:

$$\xi_1^{\ell_1} \xi_2^{\ell_2} \xi_1'^{\ell'_1} \xi_2'^{\ell'_2} = \sum_{\alpha, \beta = 0}^{N-1} q^{\alpha,\beta}_{\ell_1, \ell_2, \ell'_1, \ell'_2}(\xi_1, \xi'_1)\, \xi_2^\alpha \xi_2'^\beta$$

avec $q^{\alpha,\beta}_{\ell,\ell'}$ un polynôme à coefficients dans $k(t)$ tel que $\deg_{\xi_1} q^{\alpha,\beta}_{\ell,\ell'} \leqslant \ell_1+\ell_2-\alpha$, $\deg_{\xi'_1} q^{\alpha,\beta}_{\ell,\ell'} \leqslant \ell'_1+\ell'_2-\beta$ et $h(q^{\alpha,\beta}_{\ell,\ell'}) \leqslant (h(a^t)+\ln(2N))(\ell_1+\ell_2+\ell'_1+\ell'_2)$. En effet, $q^{\alpha,\beta}_{\ell_1,\ell_2+1,\ell'_1,\ell'_2}(\xi_1,\xi'_1)=q^{\alpha-1,\beta}_{\ell_1,\ell_2,\ell'_1,\ell'_2}(\xi_1,\xi'_1)+q^{N-1,\beta}_{\ell_1,\ell_2,\ell'_1,\ell'_2}(\xi_1,\xi'_1)\, q^t_\alpha(\xi_1)$. On se restreint aux F_i qui sont des combinaisons linéaires à coefficients dans $k(t)$ des monômes $\xi_1^{\ell_1}\xi_2^{\ell_2}\xi_1'^{\ell'_1}\xi_2'^{\ell'_2}$, avec

$$\ell_1+\ell_2 \leqslant \delta_1$$

$$\ell'_1+\ell'_2 \leqslant \delta_2.$$

Soit donc

$$F_i = \sum_{\substack{\ell_1+\ell_2\leqslant\delta_1\\ \ell'_1+\ell'_2\leqslant\delta_2}} f^{(i)}_{\ell_1,\ell_2,\ell'_1,\ell'_2}\,\xi_1^{\ell_1}\xi_2^{\ell_2}\xi_1'^{\ell'_1}\xi_2'^{\ell'_2}.$$

Le système s'écrit alors

$$\sum_{\ell_1,\ell_2,\ell'_1,\ell'_2} [f^{(i)}_{\ell,\ell'}(P_jQ_i)^d - f^{(j)}_{\ell,\ell'}(P_iQ_j)^d]\,\xi_1^{\ell_1}\xi_2^{\ell_2}\xi_1'^{\ell'_1}\xi_2'^{\ell'_2}=0.$$

Les P_i et les Q_i sont des polynômes en les variables ξ_1, ξ_2, ξ'_1, ξ'_2. On peut écrire ce système à l'aide des $q^{\alpha,\beta}_{\ell,\ell'}$:

$$\sum L^{(i,j)}_{\ell_1,\ell_2,\ell'_1,\ell'_2}(f^{(i,j)})\,\xi_1^{\ell_1}\xi_2^{\ell_2}\xi_1'^{\ell'_1}\xi_2'^{\ell'_2}=0 \qquad \text{pour} \quad i,j=0,\dots,m;$$

où les $L^{(i,j)}_{\ell_1,\ell_2,\ell'_1,\ell'_2}(f^{(i,j)}$ sont des formes linéaires en les coefficients des F_i et F_j, à coefficients dans $k(t)$, vérifiant

$$h(L^{(i,j)}_{l_1,l_2,l'_1,l'_2}) \leqslant \frac{1}{[k':\mathbb{Q}]}\sum_v \delta_v \max_{i,j} \ln\max|\mathrm{coeff}((P_{i,t}Q_{j,t})^d)|_v + \max_{i,j,l,l'} h(q^{(i,j)}_{l,l'}),$$

(où coeff(P) parcourt l'ensemble des coefficients de P).

D'où $h(L^{(i,j)}_{l_1,l_2,l'_1,l'_2}) \leqslant 2dh(Q_t)+\ln(d+1)+d\max_{i,j}\deg(P_iQ_j)(h(a_t)+\ln(2N))$, où $h(Q_t)$ désigne un majorant de $(1/[k':\mathbb{Q}])\sum_v \delta_v \max_i \ln\max|\mathrm{coeff}((P_{i,t},Q_{i,t}))|_v$.

Remarquons que les polynômes Q_i et P_i sont définis au-dessus d'un ouvert de T. Sur cet ouvert, leurs coefficients peuvent être vus comme des polynômes en t, donc la hauteur du point dont les coordonnées sont tous ces coefficients est majorée par $c_8(h_\tau(t)+1)$. Cependant, contrairement à ce qui se passe pour les $G^t_{v,j}$, nous ne connaissons pas d'hypersurface dont l'équation s'exprimerait en fonction de ces polynômes P_i et Q_i. Ainsi nous ne voyons pas comment borner leur hauteur en fonction de celle de $\mathscr{C}_t$ donnée par le plongement φ et celle de $\mathscr{C}_t\times\mathscr{C}_t$ donnée par le plongement φ_B.

Nous pouvons tout de même écrire

$$h(L^{(i,j)}_{l_1,l_2,l'_1,l'_2}) \leqslant dc_9(h_\tau(t)+1),$$

avec c_9 constante positive ne dépendant que de φ, φ_B et du plongement projectif φ_τ de T.

• *Estimation du nombre d'inconnues du système.* On travaille ici sur une fibre. Le genre étant identique sur toutes les fibres au-dessus de T', le calcul est valable pour toute fibre.

D'après le théorème de Riemann–Roch, l'espace des sections de $\mathcal{O}(\delta_1, \delta_2)$ restreint à $\mathscr{C}_t \times \mathscr{C}_t$ a pour dimension: $\frac{1}{2}(\delta_1 3K_t \times \mathscr{C}_t + \delta_2 \mathscr{C}_t \times 3K_t)$. $(\delta_1 3K_t \times \mathscr{C}_t + \delta_2 \mathscr{C}_t \times 3K_t - K_t \times \mathscr{C}_t - \mathscr{C}_t \times K_t) + (g-1)^2 = N^2\delta_1\delta_2 - N(g-1)$ $(\delta_1+\delta_2) + (g-1)^2$. Alors l'espace E_0 des fonctions $F_i(x, x')$ a pour dimension

$$\begin{aligned}\dim E_0 &= (m+1)[N^2\delta_1\delta_2 - N(g-1)(\delta_1+\delta_2) + (g-1)^2]\\ &\leqslant (m+1)\, N^2\delta_1\delta_2.\end{aligned}$$

Soit E_1 le $k(t)$-espace vectoriel des F_i qui sont des combinaisons linéaires des monômes $\xi_1^{l_1}\xi'^{l'_1}_1\xi_2^{l_2}\xi'^{l'_2}_2$. On a

$$\begin{aligned}\dim E_1 &= (m+1)\left(\sum_{i,\,j=0}^{N-1} (\delta_1 - j)(\delta_2 - i)\right)\\ &= (m+1)\left(N^2\delta_1\delta_2 - (\delta_1+\delta_2)\frac{N^2(N-1)}{2} + \left(\frac{N(N-1)}{2}\right)^2\right).\end{aligned}$$

Alors $\operatorname{codim}_{E_0}(E_1) \leqslant (m+1)(N^2(N-1)/2)(\delta_1+\delta_2)$.

Le nombre d'inconnues du système linéaire est $\dim(E_1) \leqslant (m+1)\, N^2\delta_1\delta_2$, pour δ_1 et δ_2 suffisamment grands.

Soit E_2 l'espace des sections s. D'après le théorème de Riemann–Roch, $\dim(E_2) \geqslant \frac{1}{2}V_t \cdot (V_t - K_t \times \mathscr{C}_t - \mathscr{C}_t \times K_t) + (g-1)^2$; d'où,

$$\dim(E_2) \geqslant (2g-2)^2\,(d_1d_2 - gd^2) - 2(g-1)^2\,(d_1+d_2) + (g-1)^2.$$

Donc l'espace des solutions indépendantes $E_1 \cap E_2$ a pour dimension:

$$\begin{aligned}\dim(E_1 \cap E_2) &\geqslant \dim E_2 - \operatorname{codim}_{E_0}(E_1)\\ &\geqslant \frac{N^2}{9}(d_1d_2 - gd^2) - \frac{N^2}{18}(d_1+d_2) - \frac{(m+1)}{2}N^3(\delta_1+\delta_2).\end{aligned}$$

• *Majoration de $h(\mathscr{F})$.* On fait l'hypothèse $d_1d_2 - gd^2 = (\mu/(g+\mu))\, d_1d_2 > 0$.

Alors, $\dim(E_1 \cap E_2) \geqslant \gamma(N^2/9)\, d_1 d_2$ avec $\gamma < (\mu/(g+\mu))$, pour d_1, d_2, et d suffisamment grands. La hauteur des équations est inférieure à $dc_9(h_\tau(t)+1)$. Donc d'après le lemme de Siegel, il existe une section s telle que

$$h(\mathscr{F}) \leqslant \frac{9(m+1)\,\delta_1\delta_2}{\gamma d_1 d_2}\, c_9(h_\tau(t)+1)\, d.$$

Remarquons que la constante γ ne dépend pas de t, les dimensions des espaces vectoriels intervenant dans le raisonnement étant les mêmes pour toutes les fibres.

En utilisant les expressions $\delta_1 = (d_1 + rd)/3$ et $\delta_2 = (d_2 + rd)/3$, ainsi que les relations $d_1 d_2 > gd^2 \geqslant 2d^2$ et donc $d < (d_1 + d_2)/2$, on obtient le lemme suivant.

Lemme 5.8. *Soit $\gamma > 0$. Soient d_1, d_2, d suffisamment grands pour que*

$$\frac{N^2}{9}(d_1 d_2 - gd^2) - \frac{N^2}{18}(d_1 + d_2) - \frac{(m+1)}{2} N^3(\delta_1 + \delta_2) > \frac{N^2}{9}\gamma d_1 d_2.$$

Soit V le diviseur de Vojta déterminé par d_1, d_2 et d. Alors il existe une constante c_{10} ne dépendant que de φ et de φ_τ, telle que pour tout $t \in \widetilde{T}(\bar{k})$, il existe s, une section non triviale de $\mathcal{O}(V_t)$, représentée par les F_i, qui sont tels que

$$h(\mathscr{F}) \leqslant \frac{c_{10}}{\gamma}(h_\tau(t)+1)(d_1 + d_2).$$

Preuve. La constante $c_{10} = [(m+1)(r+1)^2/2]\, c_9$ convient et ne dépend pas de t ni de d_1, d_2, d, ni de γ.

5.d. *Estimation des indices (i_1^*, i_2^*) admissibles pour (z, w) et s: application du lemme de Roth*

Dans cette partie, on travaille sur la fibre, on suit la méthode de Bombieri et on utilise les constructions et les majorations données dans les sections précédentes.

Rappelons quelques notations

$$\xi_i = \frac{x_i}{x_0}, \qquad \xi = (\xi_1, ..., \xi_n), \qquad \eta_i = \frac{y_i}{y_0}.$$

On a $h_{3K}(z) = h(\xi(z)) \leqslant \sum_{j=1}^{n} h(\xi_j(z))$. Donc il existe k tel que $h(\xi_k(z)) \geqslant (1/n)\, h_{3K}(z)$. De même, il existe l, tel que $h(\xi'_l(w)) \geqslant (1/n)\, h_{3K}(w)$.

Soit g la fonction rationnelle sur $\mathscr{C}_t \times \mathscr{C}_t$ définie à la Section 5.a, $g = F_i(\xi, \xi')\, \eta_i^d$, pour tout i, avec F_i choisis comme à la section précédente.

Soit $G_0 = \mathrm{Norme}_{k(t)(\mathscr{C}_t \times \mathscr{C}_t)/k(t)(\xi_k, \xi'_l)}(g) = \mathrm{Norme}(F_0(\xi, \xi'))$.

Notons $G_i = \mathrm{Norme}(F_i(\xi, \xi'))$. Alors, $G_i \in k(t)[\xi_k, \xi'_l]$. La norme de η_i est un élément de $k(t)(\xi_k, \xi'_l)$, donc il existe deux polynômes U_i et V_i appartenant à $k(t)[X, Y]$ tels que $\mathrm{Norme}(\eta_i) = U_i(\xi_k, \xi'_l)/V_i(\xi_k, \xi'_l)$.

Alors pour tout i, $G_0 = G_i(V_i/U_i)^d$. Comme $k(t)[\xi_k, \xi'_l]$ est factoriel U_i^d divise G_i. Soit alors $W_i = G_i/U_i^d$. Comme $y_0, ..., y_m$ n'ont pas de zéro commun, il existe i_0 tel que $U_{i_0}(\xi_k(z), \xi'_l(w)) \neq 0$.

Le polynôme $W := W_{i_0}$ s'annule en $(\xi_k(z), \xi'_l(w))$ au moins autant de fois que s en (z, w). Donc $i_1^*(s) \leqslant i_1^*(W)$ et $i_2^*(s) \leqslant i_2^*(W)$.

Rappelons le lemme de Roth, qu'on appliquera à W.

Lemme de Roth (cf. [1] ou [11, Chap. 7]). *Soit m, un entier non nul, et λ, un réel strictement positif, soit $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, X_2, ..., X_m]$ avec $\deg_{X_i} P \leqslant d_i$ et soit $\beta = (\beta_1, ..., \beta_m) \in \overline{\mathbb{Q}}^d$ tels que*:

1. $d_{i+1} \leqslant \lambda^{2^{i-1}} d_i$ *pour* $i = 1, ..., m-1$
2. $\min_{1 \leqslant i \leqslant m} d_i h(\beta_i) \geqslant \lambda^{-2^{m-1}}(h(P) + 2md_1)$.

Alors $\mathrm{Ind}_{\beta, d} := i_1^*(P)/d_1 + \cdots + i_m^*(P)/d_m \leqslant 2m\lambda$.

Estimons les degrés partiels et la hauteur de W.

Soit $D_{i,t}$ le diviseur des zéros de y_i restreint à C_t. On a l'équivalence linéaire $D_{i,t} \sim B_t = r(\mathscr{C}_t \times K_t + K_t \times \mathscr{C}_t) - \Delta'_t$. Le nombre d'intersection de $D_{i,t}$ avec $\pi_k^{-1}(\xi_k(z)) \times \mathscr{C}_t$ est $Nr(2g-2)$ car la projection π_k de $\mathscr{C}_t$ dans $\mathbb{P}^1$ est de degré N. Donc U_i est de degré $Nr(2g-2)$ en chaque variable. Par ailleurs, G_i est le produit de N^2 formes de bidegré (δ_1, δ_2).

D'où $\deg_{\xi_k} W \leqslant N^2\delta_1 - Nr(2g-2)\, d = N(2g-2)\, d_1$ et $\deg_{\xi'_l} W \leqslant N^2\delta_2 - Nr(2g-2)\, d = N(2g-2)\, d_2$.

Pour obtenir un majorant de $h((W)$, nous utilisons le lemme de Gelfond (voir [11, Chap. 3, Prop. 2.12]).

En l'appliquant à $G_0 = WV_{i_0}^d$, on obtient

$$h(W) + dh(V_{i_0}) \leqslant 2(\deg(W) + d\deg(V_{i_0})) + h(G_0).$$

D'où

$$\begin{aligned} h(W) &\leqslant h(G_0) + 2(\deg(W) + d\deg(V_{i_0})) \\ &\leqslant h(G_0) + 2\left(\frac{N^2}{3}(d_1 + d_2) + 2d\frac{N^2}{3} r\right), \end{aligned}$$

car $\deg V_{i_0} = \deg U_{i_0} = 2r(N^2/3)$. C'est-à-dire $h(W) \leqslant h(G_0) + 2(N^2(\delta_1 + \delta_2))$.

Rappelons que $G_0 = \mathrm{Norme}(F_0(\xi, \xi'))$ est le produit de N^2 formes de bidegré (δ_1, δ_2). Les coefficients de $G_0 \in k(t)[\xi_k, \xi'_l]$ peuvent être vus comme des polynômes (à coefficients dans k) en les éléments de $k(t)$ que sont les coefficients de F_0 et en ceux des relations de dépendance intégrale des ξ_j en fonction de ξ_t et des ξ'_j en fonction de ξ'_l. Les hauteurs de ces relations de dépendance sont majorées par $h_\varphi(\mathscr{C}_t)$, car ce sont les équations de projetées birationnelles de $\mathscr{C}_t$. Donc il existe une constante c_{11} indépendante de t, de δ_1 et de δ_2 telle que,

$$h(G_0) \leqslant c_{11}(h(\mathscr{F}) + h_\tau(t) + \delta_1 + \delta_2 + 1).$$

LEMME 5.9. *Il existe une constante c_{12} ne dépendant que de φ et φ_B et du plongement projectif φ_τ de T telle que: si $0 < \lambda < 1$ est tel que $d_2/d_1 \leqslant \lambda^2$ et* $\min(d_1 h_{3K}(z), d_2 h_{3K}(w)) \geqslant (c_{12}/\gamma\lambda^2)\, d_1(h_\tau(t) + 1)$, *alors pour toute section s de $\mathcal{O}(V_t)$ comme au Lemme 5.8, les indices admissibles (i_1^*, i_2^*) sont tels que $i_1^*/d_1 + i_2^*/d_2 \leqslant \frac{4}{3} N^2 \lambda$.*

Preuve. Si $0 < \lambda < 1$ est tel que $d_2/d_1 \leqslant \lambda^2$, on a $d_2 < d_1$ et $d < d_1$. Alors compte tenu de la majoration de $h(G_0)$ ci-dessus et celle de $h(\mathscr{F})$ obtenue au lemme précédent, on a l'existence d'une constante c_{13} telle que $h(W) + (4N^2/3)\, d_1 \leqslant d_1(c_{13}/\gamma)(h_\tau(t) + 1)$. On applique alors le lemme de Roth à W qui est de bidegré inférieur à $((N^2/3)\, d_1, (N^2/3) d_2)$, avec $m = 2$, $\beta_1 = \xi_k(z)$ et $\beta_2 = \xi'_l(w)$ et $c_{12}(3/N^2) c_{13}$.

5.e. *Preuve de l'inégalité de Vojta uniforme*

Soit $t \in \tilde{T}(\bar{k})$. Soit k' une extension finie de $k(t)$. Soit $(z, w) \in \mathscr{C}_t(k') \times \mathscr{C}_t(k')$. On choisit $d_1 = [D/|z|^2]$, $d_2 = [D/|w|^2]$, et $d = [D/|z|\,|w|\,\sqrt{g + \mu}]$, où D est un paramètre entier qu'on fera tendre vers l'infini.

Vérifions les conditions du Lemme 5.9 pour C_1 suffisamment grand. Si $|z|/|w| \leqslant \lambda/2$ on a la condition $d_2/d_1 \leqslant \lambda^2$ dès que D est assez grand. D'après le Lemme 3.3, on a $h_{3K}(z) \geqslant 3/2g(2g-2)^{2g-1}\, |z|^2 - 3\alpha_1(h_\tau(t) + 1)$. Soit C_1 telle que

$$C_1^2 \geqslant \frac{4g(2g-2)^{2g-1}}{3} \frac{c_{12}}{\gamma\lambda} + 2\alpha_1 g(2g-2)^{2g-1}.$$

Alors, si $|w| > |z| > C_1(1 + \sqrt{h_\tau(t)})$, on a $h_{3K}(z) > 2(c_{12}/\gamma\lambda^2)(h_\tau(t) + 1)$ et

$$\begin{aligned}
\frac{d_2}{d_1} h_{3K}(w) &\geqslant \frac{1}{2} \frac{|z|^2}{|w|^2} h_{3K}(w) \\
&\geqslant \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2g(2g-2)^{2g-1}} |z|^2 - 3\alpha_1(h_\tau(t) + 1) \right) \\
&> \frac{c_{12}}{\gamma\lambda^2} (h_\tau(t) + 1).
\end{aligned}$$

Supposons de plus, λ suffisamment petit pour que la condition $h_{3K}(z) > (c_{12}/\gamma\lambda^2)(h_\tau(t)+1)$ implique $z \notin Z_t$.

Alors d'après le Lemme 5.9,

$$\frac{i_1^*}{d_1} + \frac{i_2^*}{d_2} \leqslant \frac{4N^2}{3}\,\lambda.$$

Le Lemme 5.4 et la majoration de $h(\mathscr{F})$ (Lemme 5.8) donnent alors

$$h_V(z,w) \geqslant \frac{-c_{10}}{\gamma}\,(h_\tau(t)+1)(d_1+d_2) - \frac{18n^2N^3\lambda}{g(2g-2)^{2g-1}}\,(d_1\,|z|^2 + d_2\,|w|^2)$$
$$-n\ln((\delta_1+n)(\delta_2+n)) - (\delta_1+\delta_2) - (d_1+d_2)\,\frac{4N^2}{3}\,\lambda_{c_6}(h_\tau(t)+1).$$

En utilisant la Proposition 3.4, donnant une majoration de $h_V(z,w)$ et les inégalités $\delta_2 \leqslant \delta_1 \leqslant \frac{1}{3}(r+1)\,d_1$ et en remplaçant d_1, d_2, et d par leur valeur, on obtient l'existence d'une constante c_{14} telle que:

$$\frac{1}{2g}\left(2+\frac{|z|^2}{D}+\frac{|w|^2}{D}\right) - \frac{\langle z,w\rangle}{|z|\,|w|}\,\frac{1}{\sqrt{g+\mu}} + \frac{18nN^3\lambda}{g}\left(2+\frac{|z|^2}{D}+\frac{|w|^2}{D}\right)$$
$$\geqslant -\frac{c_{14}}{\gamma}\,(h_\tau(t)+1)\left(\frac{1}{|z|^2}+\frac{1}{|w|^2}\right) - \frac{(r+1)(2n+1)}{3}\,\frac{1}{|z|^2}.$$

D'où en faisant tendre D vers l'infini,

$$\frac{\langle z,w\rangle}{|z|\,|w|} \leqslant \frac{\sqrt{g+\mu}}{g} + 36\,\frac{n^2N^3\lambda\,\sqrt{g+\mu}}{g}$$
$$+\frac{c_{14}}{\gamma}\sqrt{g+\mu}\,(h_\tau(t)+1)\left(\frac{1}{|z|^2}+\frac{1}{|w|^2}\right) + \frac{(r+1)(2n+1)}{3\,|z|^2}.$$

On choisit $\mu = 0,01$. On a alors $\frac{3}{4} - \sqrt{g+\mu}/g > 0,04$. On choisit λ suffisamment petit pour que $36(n^2N^3\lambda\,\sqrt{g+\mu}/g) \leqslant 0,02$.

On a alors l'inégalité de Vojta uniforme annoncée avec $C_2 = 2/\lambda$ et

$$C_1^2 = \max\left(200\,\frac{c_{14}\sqrt{g+\mu}}{\gamma}\,;\,\frac{4g(2g-2)^{2g-1}}{3}\,\frac{c_{12}}{\gamma\lambda^2} + 2\alpha_1 g(2g-2)^{2g-11}\,;\right.$$
$$\left.100\,\frac{(r+1)(2n+1)}{3}\right).$$

En effet, ceci assure qu'on a $(c_{14}/\gamma)\sqrt{g+\mu}\,(h_\tau(t)+1)(1/|z|^2+1/|w|^2) \leqslant 0,01$ et $(r+1)(2n-1)/3\,|z|^2 \leqslant 0,01$.

Remarque. Comme $N = 6(g-1)$, $n = 5g-6$, et avec $\mu = 0,01$, on voit que $\lambda = 10^{-5}g^{-7/2}/27$, convient et donc C_2 peut être choisi dépendant uniquement de g. Ceci garantit le fait que la constante γ_2 du Théorème 2 ne dépend que de g et même peut être choisie absolue. En effet, avec $\gamma_1(\mathscr{C}) = \max(C_0, C_1)$, on a $\gamma_2 = 1 + \ln C_2/\ln g = \frac{9}{2} + (\ln 54 + 5 \ln 10)/\ln g \leqslant \gamma_2(2) < \frac{55}{2}$.

6. NOMBRE DE POINTS RATIONNELS

Comme cela est remarqué dans [9], si C est une courbe de genre supérieur à 2 définie sur un corps de nombres k', on peut donner un majorant du cardinal de $C(k')$ en fonction des constantes du théorème de Faltings–Vojta.

On reprend les hypothèses et les notations du 1. Soit

$$\delta(C_{k'}) := \min_{x \in J(k') \setminus J(k')_{\mathrm{tors}}} |x|.$$

PROPOSITION. *Avec les hypothèses du Théorème* 1, *on a*

$$\mathrm{Card}\ C(k') \leqslant \mathrm{Card}\ J(k')_{\mathrm{tors}} \left(1 + \frac{2\gamma_1(C)}{\delta(C_{k'})}\right)^R + \gamma_2 7^r;$$

où r désigne le rang de $J(k')$.

Démonstration. Le théorème de Mordell–Weil (voir par exemple [11]) assure que $J(k')$ est un groupe abélien de type fini. On en déduit que $J(k')/J(k')_{\mathrm{tors}} \sim \mathbb{Z}^r$. De plus, on a muni $J(k') \otimes \mathbb{R}$ d'une structure d'espace euclidien. On a

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Card}\{x \in C(k') \mid |x| < \gamma_1(C)\}\\
&\quad \leqslant \mathrm{Card}\{x \in J(k') \mid |x| < \gamma_1(C)\}\\
&\quad \leqslant \mathrm{Card}\{x \in J(k')/J(k')_{\mathrm{tors}} \mid |x| < \gamma_1(C)\}\ \mathrm{Card}\ J(k')_{\mathrm{tors}}.
\end{aligned}$$

Alors la proposition est une conséquence immédiate du Théorème 1 et du lemme élémentaire de géométrie euclidienne suivant.

LEMME. *Soit Λ un réseau dans un espace euclidien $(E, |\,|)$ de dimension r. Soit $\delta := \min_{x \in \Lambda \setminus \{0\}} |x|$. Alors, pour tout $X > 0$, $\mathrm{Card}\{x \in \Lambda, |x| < X\} \leqslant (1 + 2X/\delta)^r$.*

Démonstration du lemme. Les boules ouvertes centrées en les points λ de Λ et de rayon $1/2\delta$ sont deux à deux disjointes. Alors,

$$\operatorname{Card}\{x \in \Lambda \mid |x| < X\} \operatorname{vol}\left(B\left(0, \frac{1}{2\delta}\right)\right) = \operatorname{vol}\left(\bigcup_{|\lambda| < X} B\left(\lambda, \frac{1}{2\delta}\right)\right)$$
$$\leqslant \operatorname{vol}\left(B\left(0, X + \frac{1}{2\delta}\right)\right).$$

D'où, $\operatorname{Card}\{x \in \Lambda \mid |x| < X\} \leqslant ((2X+\delta)/\delta)^r$.

Avec la même méthode et avec les hypothèses et les notations du Théorème 2, on obtient une majoration dépendant du paramètre t du nombre de points rationnels de la fibre $\mathscr{C}_t$.

PROPOSITION 6.1. *Pour tout $t \in T^0(\bar{k})$, pour toute extension finie k' de $k(t)$,*

$$\operatorname{Card} \mathscr{C}_t(k') \leqslant \operatorname{Card} \mathscr{J}_t(k')_{\text{tors}} \left(1 + \frac{2\gamma_1(\mathscr{C})(\sqrt{h_\tau(t)} + 1)}{\delta(\mathscr{C}_{tk'})}\right)^{r_{t,k'}} + \gamma_2 7^{r_{t,k'}};$$

où $r_{t,k'}$ est le rang de $\mathscr{J}_t(k')$.

En utilisant cette proposition on peut donner une majoration uniforme du nombre de points k'-rationnels des courbes de certaines familles plates paramétrées par une courbe dont les fibres sont des courbes de genre supérieur ou égal à 2. L'idée est de majorer uniformément le nombre de points de torsion de la jacobienne et de minorer $\delta(\mathscr{C}_{tk'})$ par $c_{15}(\sqrt{h_\tau(t)} + 1)$.

Concernant le nombre de points de torsion, on dispose d'un résultat de Mérel (voir [4]).

THÉORÈME (Mérel). *Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante B_d strictement positive telle que pour tout corps de nombres k' de degré d sur $\mathbb{Q}$ et toute courbe elliptique E sur k',*

$$\operatorname{Card} E(k')_{\text{tors}} < B_d.$$

D'autre part Hindry et Silverman donnent dans [10] pour tout point d'ordre infini sur une courbe elliptique E sur un corps de nombres k' une minoration de sa hauteur canonique ne dépendant que du quotient de Szpiro de E sur k' et du degré de k' sur $\mathbb{Q}$.

Soit E une courbe elliptique sur k'. On note j son invariant j, $\Delta_{k'}$ son discriminant minimal et $F_{k'}$ son conducteur. On considère la hauteur $k_{k'}(E) := \frac{1}{12}\max(h, j), \ln|\text{Norme } \Delta_{k'}|)$ de E. On note $\sigma_{E,k'} = \ln|\text{Norme } \Delta_{k'}| / \ln|\text{Norme } F_{k'}|$ son quotient de Szpiro. On considère une hauteur de Néron–Tate $\hat{h}$ sur $E(\bar{k}')$ associée à un diviseur ample et symétrique.

THÉORÈME (Hindry–Silverman). *Il existe une constante strictement positive c ne dépendant que de $[k' : \mathbb{Q}]$ et de $\sigma_{E,k'}$ telle que pour tout $x \in E'(k')$ d'ordre infini $\hat{h}(x) \geqslant c h_{k'}(E)$.*

En fait la constante c est totalement explicite (voir [Hi-Si, Corollaire 4.2.]) et si on admet la conjecture de Szpiro que nous rappelons ci-dessous, on a que c ne dépend que de k'.

Conjecture de Szpiro. Soit k' un corps de nombres; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de courbes elliptiques sur k' telles que $\sigma_{E,k'} \geqslant 6 + \varepsilon$.

On dit qu'une famille de courbes elliptiques est isotriviale si l'invariant j est constant.

Hypothèses (*). Soit $\mathscr{C}$ une famille de courbes paramétrée par une courbe T et vérifiant les hypothèses de la Section 2. On suppose de plus qu'il existe g familles de courbes elliptiques $\mathscr{E}_1, ..., \mathscr{E}_g$ plates sur T^0 et non isotriviales et un morphisme de α de T^0-schémas de $\mathscr{J}$ dans $\mathscr{E}_1 \times \cdots \times \mathscr{E}_g$ tels que pour tout $t \in T^0$, α_t soit une isogénie de $\mathscr{J}_t$ dans $\mathscr{E}_{1_t} \times \cdots \times \mathscr{E}_{g_t}$. Alors, le degré des α_t est constant, on le notera $\deg \alpha$.

Alors on a une majoration uniforme du nombre de points de torsion. Le lemme suivant est une conséquence immédiate du théorème de Mérel.

LEMME 6.2. *Il existe une constante $B_{[k' : \mathbb{Q}]}$ ne dépendant que de $[k' : \mathbb{Q}]$ telle que pour tout $t \in T^0(k')$,*

$$\operatorname{Card} \mathscr{J}_t(k')_{\mathrm{tors}} \leqslant B^g_{[k' : \mathbb{Q}]} \deg \alpha.$$

On a la minoration suivante des hauteurs de points d'ordre infini de $\mathscr{J}_t(k')$.

PROPOSITION 6.3. *Pour tout $t \in T^0(k')$ il existe un réel strictement positif $C_3(\sigma_{\mathscr{E}_{1_t}}, ..., \sigma_{\mathscr{E}_{g_t}})$ ne dépendant que des quotients de Szpiro des courbes $\mathscr{E}_{1_t}, ..., \mathscr{E}_{g_t}$ tel que pour tout point x de $\mathscr{J}_t(k')$ qui n'est pas de torsion, on ait $|x| \geqslant C_3(\sigma_{\mathscr{E}_{1_t}}, ..., \sigma_{\mathscr{E}_{g_t}})(\sqrt{h_\tau(t)} + 1)$.*

La preuve repose sur les lemmes suivants.

LEMME a. *Soit $\mathscr{E}$ une famille plate de courbes elliptiques paramétrée par un ouvert T' d'une courbe projective T sur un corps de nombres k. Pour tout $t \in T'$, on note $j(t)$ l'invariant j de $\mathscr{E}_t$. On note h_τ une hauteur de Weil positive associée à un diviseur ample de T. Alors si $\mathscr{E}$ n'est pas isotriviale, il existe deux constantes strictement positives β_1 et β_2 telles que $h(j(t)) \geqslant \beta_1 h_\tau(t) - \beta_2$.*

Preuve. L'application qui à t associe $j(t)$ s'étend en un morphisme de T dans $\mathbb{P}^1$, car T est une courbe. Le lemme est alors une conséquence de la théorie élémentaire des hauteurs.

Remarquons qu'alors, d'après le théorème de Northcott, il existe une constante strictement positive β' telle que sauf pour un nombre fini de $t \in T(k')$, où k' est extension finie de k, on ait

$$h(j(t)) \geqslant \beta'(h_\tau(t)+1).$$

LEMME b. *Soient A et B deux variétés abéliennes définies sur un corps de nombres k. Soient c ample sur A et c' ample sur B. Soit α une isogénie de A sur B. Alors il existe des constantes positives β_3 et β_4 telles que $\beta_3 \hat{h}_c \leqslant \hat{h}_{c'} \circ \alpha \leqslant \beta_4 \hat{h}_c$.*

Preuve. On peut suppose que c et c' sont très amples. Soient A et B plongées dans des espaces projectifs par des plongements associés à c et c' respectivement. Alors il existe un entier d borné en fonction du degré de α tel que α peut être décrite par des formes de degré d. Le lemme résulte alors de la théorie des hauteurs appliquée à α et à l'isogénie duale de α.

Preuve de la Proposition 6.3. Soit la hauteur définie sur $\mathscr{E}_1 \times \cdots \times \mathscr{E}_g$ par $\hat{h}_{\mathscr{E}_1 \times \cdots \times \mathscr{E}_g}(P_1, ..., P_g) = \hat{h}_{\mathscr{E}_1}(P_1) + \cdots + \hat{h}_{\mathscr{E}_g}(P_g)$; où $\hat{h}_{\mathscr{E}_i}$ désigne la hauteur de Néron–Tate associée à un diviseur ample de $\mathscr{E}_i$. Soit x un point de non-torsion de $\mathscr{J}_t(k')$. Alors $\alpha(x)$ n'est pas de torsion. Le théorème d'Hindry–Silverman conjugué au lemme a donne alors que $\hat{h}(\alpha(x)) > c_{16}(h_\tau(t)+1)$ sauf sur un nombre fini de fibres.

Alors en appliquant le Lemme b au diviseur θ' et à la hauteur $\hat{h}_{\mathscr{E}_1 \times \cdots \times \mathscr{E}_g}$ et en utilisant que les constantes β_3 et β_4 ne dépendent pas de t, on a le résultat annoncé.

On déduit alors facilement du Lemme 6.2 et des Propositions 6.1 et 6.3, une borne uniforme en $h_\tau(t)$ du nombre de points rationnels sur un corps de nombres k' des fibres d'une famille vérifiant les hypothèses (*).

PROPOSITION 6. *Soit $\mathscr{C}$ une famille de courbes vérifiant les hypothèses (*). Pour toute extension finie k' de k, pour tout $t \in T^0(k')$,*

$$\operatorname{Card} \mathscr{C}_t(k') \leqslant (\gamma_3(\sigma_{\mathscr{E}_{1\,t}}, ..., \sigma_{\mathscr{E}_{g_t}}))^{\operatorname{rang} \mathscr{J}_t(k')+1};$$

où $\gamma_3(\sigma_{\mathscr{E}_{1_t}}, ..., \sigma_{\mathscr{E}_{g_t}})$ est une constante positive ne dépendant que du degré de k' sur $\mathbb{Q}$, de la famille et des quotients de Szpiro des courbes $\mathscr{E}_{1_t}, ..., \mathscr{E}_{g_t}$. Et si la conjecture de Szpiro est vraie, γ_3 ne dépend que de la famille et du corps k'.

Exemples. 1. Soit la famille $\mathscr{C}$ d'équation affine $y^2 = x^6 + a(t)x^4 + b(t)x^2 + c(t)$, où a, b, et c sont des fractions rationnelles en $t \in \mathbb{P}^1$. Les fibres sont des courbes de genre deux et pour tout t, $\mathscr{J}_t$ est isogène au produit de deux courbes elliptiques: $\mathscr{E}_t$ d'équation $y^2 = x^3 + a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$ et $\mathscr{E}'_t$ d'équation $y^2 = 1 + a(t)\,x + b(t)\,x^2 + c(t)\,x^3$. En effet le morphisme $(x, y) \mapsto (x^2, y)$ défini sur $\mathscr{C}$ a pour image la famille $\mathscr{E}$ et le morphisme $(x, y) \mapsto (1/x^2, y/x^3)$ a pour image la famille $\mathscr{E}'$. Si on suppose de plus que a, b, c sont telles que $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ ne sont isotriviales, la Proposition 6 s'applique.

2. Soit la famille $\mathscr{C}$ paramétrée par $\mathbb{P}^1$ d'équation affine $y^2 = (x^2 - a(t))(x^2 - a(t)^{-1})(x^2 - b(t))(x^2 - b(t)^{-1})$. On suppose que a et b sont tels que la fibre générique soit lisse. Les fibres de cette famille sont de genre 3:

Le morphisme $(x, y) \mapsto (x^2, y)$ défini sur $\mathscr{C}$ a pour image la famille $\mathscr{E}_1$ d'équation affine

$$y^2 = (x - a(t))(x - a(t)^{-1})(x - b(t))(x - b(t)^{-1}).$$

Le morphisme $(x, y) \mapsto (x + x^{-1}, yx^{-2})$ a pour image la famille $\mathscr{E}_2$ de courbes elliptiques d'équation

$$\begin{aligned} y^2 = x^4 &- (4 + a(t) + a(t)^{-1} + b(t) + b(t)^{-1})\,x^2 \\ &+ 4 + 2(a(t) + a(t)^{-1} + b(t) + b(t)^{-1}) \\ &+ a(t)\,b(t)^{-1} + a(t)\,b(t) + a(t)^{-1}\,b(t) + a(t)^{-1}\,b(t)^{-1}. \end{aligned}$$

Le morphisme $(x, y) \mapsto (x - x^{-1}, xy^{-2})$ a pour image la famille $\mathscr{E}_3$ de courbes elliptiques d'équation

$$\begin{aligned} y^2 = x^4 &- (-4 + a(t) + a(t)^{-1} + b(t) + b(t)^{-1})\,x^2 \\ &+ 4 - 2(a(t) + a(t)^{-1} + b(t) + b(t)^{-1}) \\ &+ a(t)\,b(t)^{-1} + a(t)\,b(t) + a(t)^{-1}\,b(t) + a(t)^{-1}\,b(t)^{-1}. \end{aligned}$$

Alors $\mathscr{J}$ est isogène à $\mathscr{E}_1 \times \mathscr{E}_2 \times \mathscr{E}_3$.

Si on suppose de plus que a, b, c sont telles que $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, et $\mathscr{E}_3$ ne sont pas isotriviales, la Proposition 6 s'applique.

3. Soit la famille $\mathscr{C}$ d'équations affines $y^2 = P(x)$, $z^2 = P(-x)$; où P est un polynôme de degré 3 à coefficients dans le corps des fonctions d'une courbe T sur un corps de nombres k, tel que $P(x)\,P(-x)$ n'ait pas de racine double. Les fibres sont de genre 4. Le morphisme $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ a pour image la famille de courbes elliptiques $\mathscr{E}_1$ d'équation affine $y^2 = P(x)$. Le morphisme $(x, y, z) \mapsto (x, z)$ a pour image la famille de

courbes elliptiques $\mathscr{E}_2$ d'équation affine $z^2 = P(-x)$. Le morphisme $(x, y, z) \mapsto (x, yz)$ a pour image la famille $\mathscr{C}_1$ de courbes de genre 2 d'équations $y^2 = P(x)\,P(-x)$. En fait $\mathscr{C}_1$ est du type du premier exemple. La famille des jacobiennes de la famille $\mathscr{C}_1$ est isogène au produit de deux courbes elliptiques. On en déduit que la famille des jacobiennes de $\mathscr{C}$ est isogène à un produit de quatre familles de courbes elliptiques.

On suppose de plus que a, b, c sont telles que ces familles ne sont pas isotriviales. On peut alors appliquer la Proposition 6.

REMERCIEMENTS

Je remercie Marc Hindry pour les conversations nombreuses et fructueuses que nous avons eues sur le sujet de cet article et Barry Mazur pour sa question sur la variation en fonction de g de la constante γ_2 du Théorème 2.

RÉFÉRENCES

1. E. Bombieri, The Mordell conjecture revisited, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Ser. IV* **17** (1990), 615–640; **18** (1991), 473.
2. J.-B. Bost, H. Gillet, et C Soulé, Heights of projective varieties and positive Green forms, *J. Amer. Math. Soc.* **4** (1994), 903–1027.
3. T. de Diego, Thèse de doctorat, Université Paris 7, 1996.
4. B. Edixhoven, Rational torsion points on elliptic curves over number fields (after Kamienny and Mazur), *Astérisque* **227** (1995), 209–227.
5. G. Faltings, Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern, *Invent. Math.* **73** (1983), 349–366.
6. G. Faltings, Diophantine approximations on abelian varieties, *Ann. of Math.* **133** (1991), 549–576.
7. W. Gubler, Höhentheorie, *Math. Ann.* **298** (1994), 427–455.
8. R. Hartshorne, "Algebraic Geometry," Springer-Verlag, New York/Berlin, 1977.
9. M. Hindry, "Géométrie arithmétique," Cours de DEA, Université Paris 7, 1991.
10. M. Hindry et J. H. Silverman, The canonical height and integer points on elliptic curves, *Invent. Math.* **93** (1988), 419–450.
11. S. Lang, "Fundamentals of Diophantine Geometry," Springer-Verlag, 1983.
12. J. S. Milne, Jacobian varieties, *in* "Arithmetic Geometry" (G. Cornell and J. H. Silverman, Eds.), pp. 167–212, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1986.
13. D. Mumford et J. Fogarty, "Geometric Invariant Theory," 2nd ed., Springer-Verlag, New York/Berlin, 1982.
14. Y. V. Nesterenko, Estimates for the orders of the zeros of functions of a certain class and their applications in the theory of transcendantal numbers, *Math. USSR Izv.* **11** (1977), 239–270.
15. Y. V. Nesterenko, Estimates for the characteristics function of a prime ideal, *Math. USSR Sb.* **51** (1985), 9–32.
16. P. Philippon, Critères pour l'indépendance algébrique, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **64** (1986), 5–52.

17. P. Philippon, Sur des hauteurs alternatives I, *Math. Ann.* **289** (1991), 255–283; II, *Ann. Inst. Fourier* **44** (1994), 1043–1065; III, *J. Math. Pures Appl.* **74** (1995), 345–365.
18. W. M. Schmidt, Diophantine approximations and diophantine equations, Lect. Notes Math., Vol. 1467, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1991.
19. J. H. Silverman, Heights and the specialization map for families of abelian varieties, *J. Reine Angew. Math.* **342** (1983), 197–211.
20. J. H. Silverman, A uniform bound for rational points on twists of a given curve, *J. London Math. Soc.* **47** (1993), 385–394.
21. P. Vojta, Siegel's theorem in the compact case, *Ann. Math.* **133** (1991), 509–548.